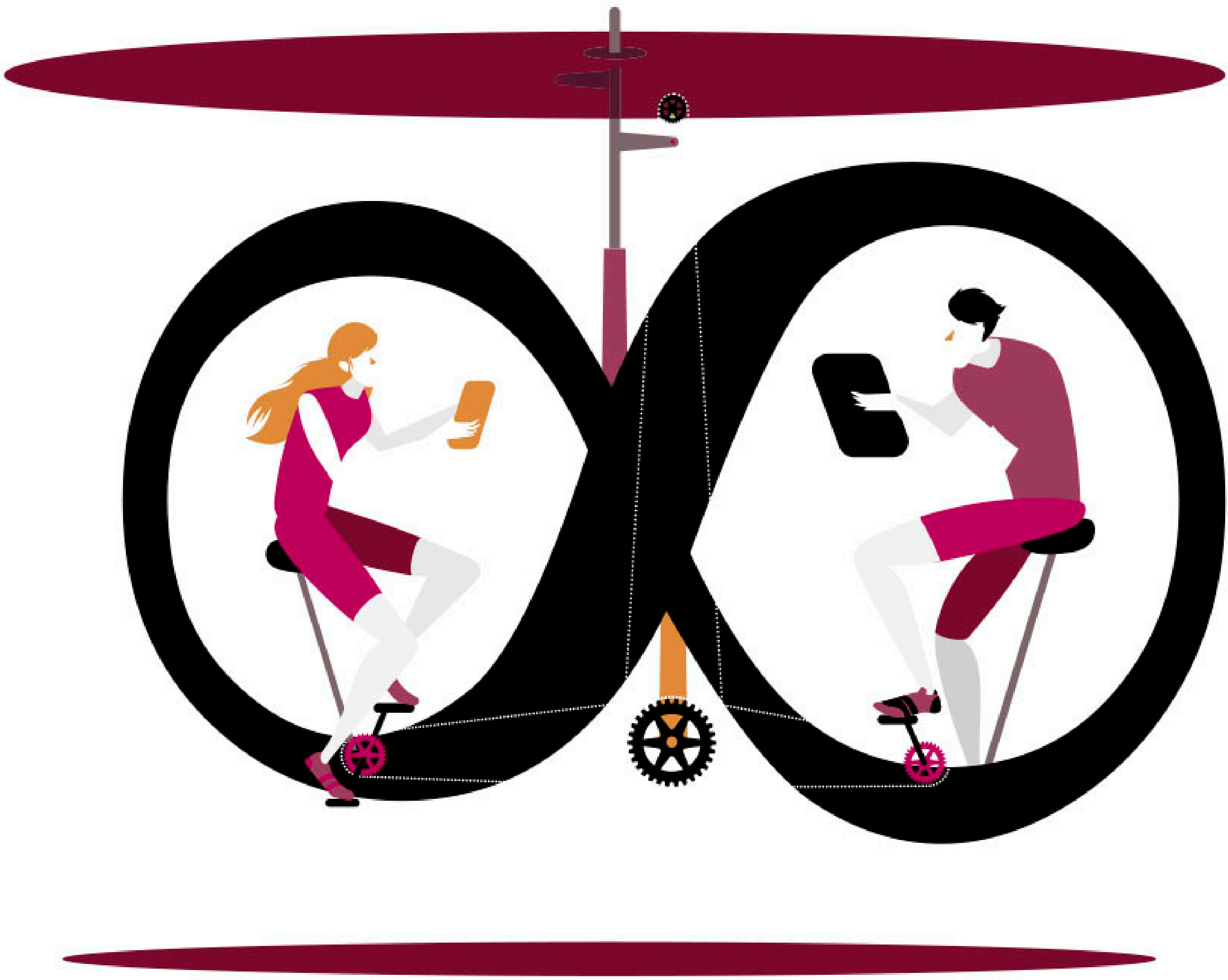
conecta MÁS
SECUNDARIA

Matemáticas 2



sm

Dirección de contenidos educativos
Felipe Ricardo Valdez González

Gerencia de publicaciones escolares
Agustín Pérez Allende

Gerencia de desarrollo de producto
Jesús Arana Trejo

Dirección de arte y diseño
Quetzatl León Calixto

Autoría
Hugo Balbuena Corro,
David Block Sevilla,
Silvia García Peña

Coordinación ejecutiva de secundaria y bachillerato
Áurea Ireri Madrigal Mondragón

Edición
Cristóbal Bravo Marván

Diseño de evaluaciones
Hugo Balbuena Corro

Coordinación de corrección
Abdel López Cruz, Laura Martínez García

Corrección
Ilah De La Torre

Diseño de la serie
Equipo SM

Diseño de portada
Claudia Adriana García Villaseñor

Ilustración de portada
Enrique Márquez Flores

Coordinación Gráfica y diagramación
César Leyva Acosta

Diagramación
Martha Angélica Ramos Gómez

Ilustración de interiores
Arturo Ramírez S.
Martha Angélica Ramos Gómez

Coordinación de iconografía e imagen
Ricardo Tapia García

Iconografía
Zyanya Zavaleta Ortiz

Digitalización e imagen
Carlos A. López

Fotografía
©iStock, 2018, © AFP, 2018,
Archivo SM, Carlos Vargas

Archivo digital
Lilia Alarcón Piña

Tecnología editorial
Josué Lara Cortés

Producción
Valeria Salinas, José Navarro

Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más.
Primera edición, 2019

Magdalena 211, Colonia del Valle, 03100,
alcaldía Benito Juárez, Ciudad de México, México
Tel.: (55) 1087 8400
www.grupo-sm.com.mx

ISBN 978-607-24-3101-0

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro número 2830

Impreso en México/Printed in Mexico

Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más.
Se terminó de imprimir en

Presentación

A los alumnos y a sus familias, ¡bienvenidos a **Conecta Más**!

Conecta Más es un nuevo proyecto educativo integral, que está presente en varios países de Iberoamérica construyendo comunidad.

Conecta Más ofrece a los alumnos oportunidades para aprender más, mejor y de manera diferente los contenidos de las asignaturas del currículo oficial. Este proyecto se basa en un modelo de educación para la vida, sobre el que se construyen las actividades con las cuales se desarrollan las distintas dimensiones de la persona.

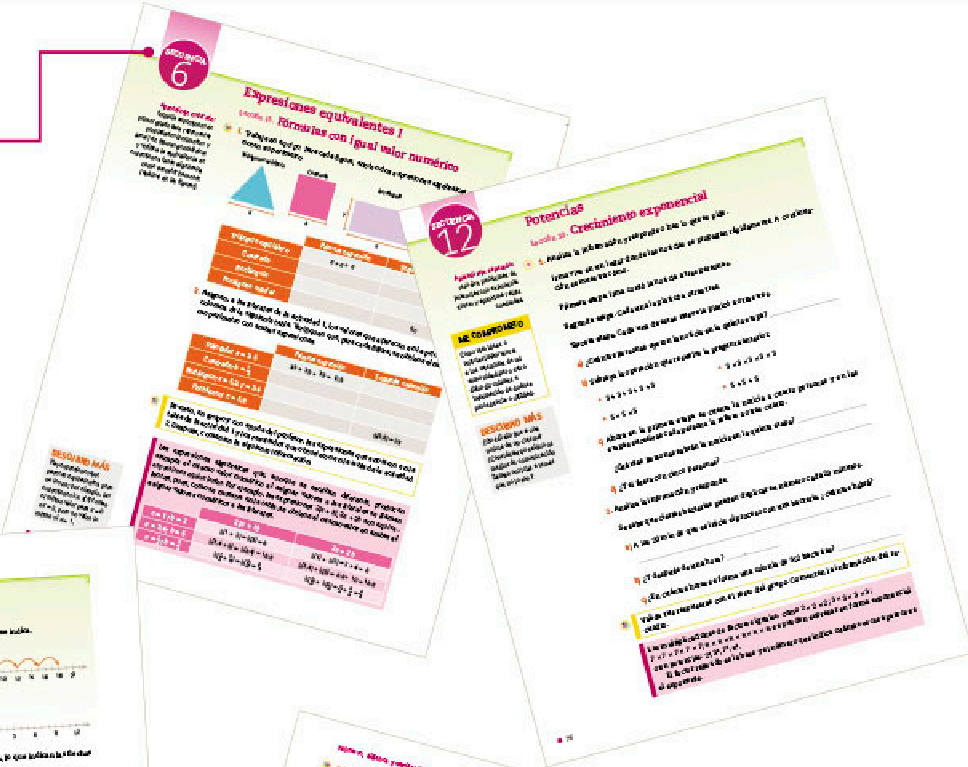
Para **Conecta Más**, los aprendices del siglo XXI requieren adquirir no solo los conceptos y procesos tradicionales, sino desarrollar estrategias para aprender a pensar, para trabajar y para vivir plenamente en el mundo. Esto es lo que hace de **Conecta Más** un proyecto emocionante y divertido, que los impulsa a aprender y comprender para tomar decisiones.

El proyecto **Conecta Más**, asimismo, está pensado para que las escuelas se conviertan en zonas de reflexión sensibles a las necesidades particulares de todos; que estén llenas de un espíritu enérgico que centre a toda su comunidad —directores, docentes, padres y madres de familia y alumnos— en los procesos de enseñanza y aprendizaje que giran en torno al pensamiento y a la formación valoral. Además, el proyecto incorpora tecnología, de modo que las actividades y los contenidos interactivos enriquezcan las clases y faciliten, tanto a aprendices como a profesores, la comprensión de lo fundamental.

Todo lo anterior se presenta en un rico entorno gráfico, atractivo y artístico, que constituye un ambiente propicio para crecer y desarrollarse. En los libros impresos y en los cibertextos (libro digital) de **Conecta Más** hay contenidos, textos, actividades, cápsulas, talleres, entre otras secciones, que favorecen la aplicación de lo aprendido en una diversidad de contextos.

Nuestro deseo es que disfruten **Conecta Más** tanto como nosotros lo hemos hecho al construirlo.

Guía de uso



Secuencias didácticas
Se identifican con un nombre y un número; el nombre alude al tema que se va a estudiar. Cada secuencia está formada por varias lecciones, en las que se desarrollan los contenidos matemáticos.

Actividad de inicio de secuencia
Sirve para identificar el contenido matemático que trabajarás o para recuperar conocimientos previos que te serán útiles durante el desarrollo de la secuencia.

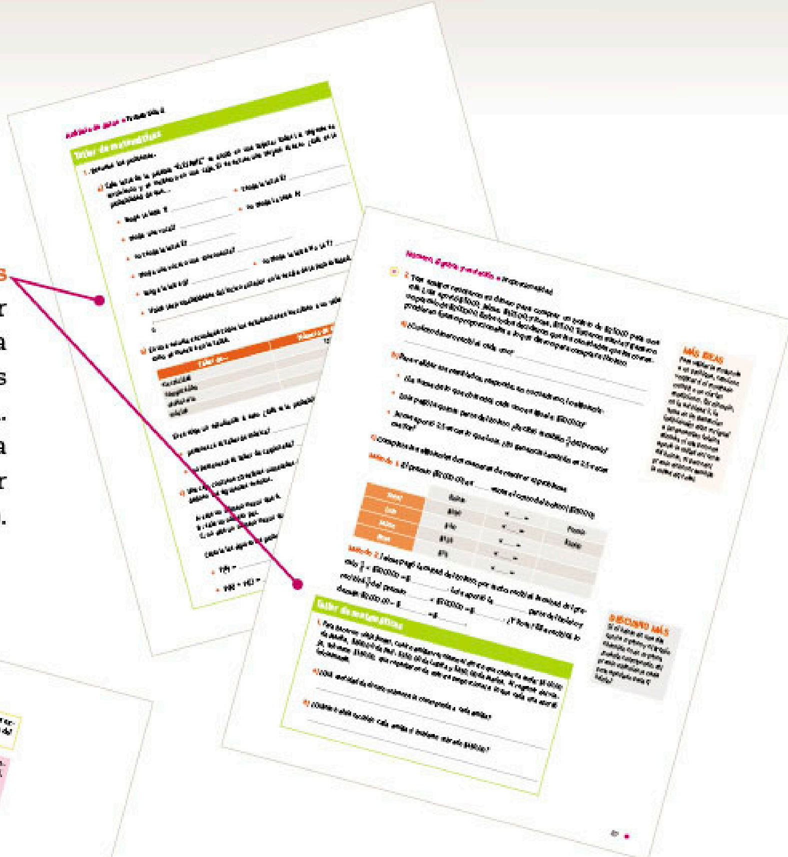
Actividades
Problemas que animan a pensar para encontrar vías de solución, tareas para desarrollar fuera del libro y ejercicios para consolidar lo aprendido.
Las modalidades de trabajo se indican mediante iconos:

Individual:

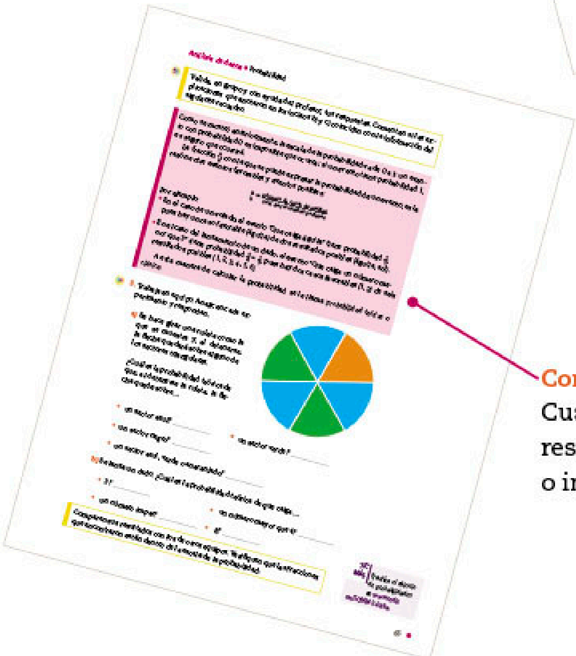
Pareja:

Equipo:

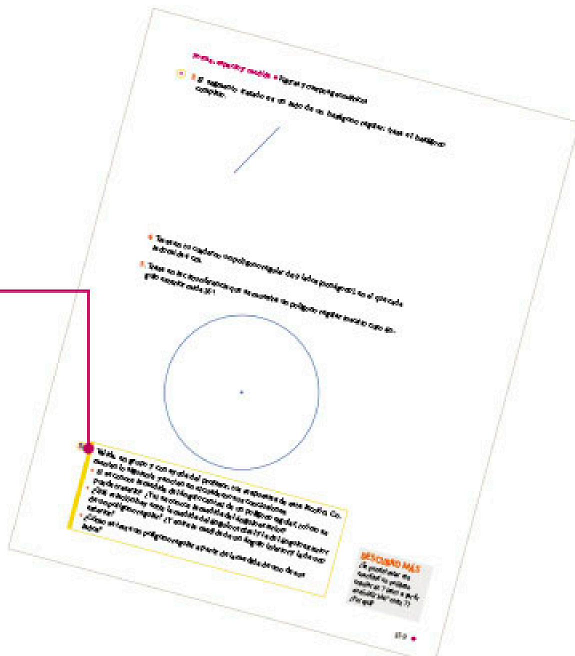
Grupal:



Taller de matemáticas
Actividades para integrar lo aprendido durante la secuencia y afianzar las ideas más importantes de ella. Puedes trabajarlas en casa (como tarea o para preparar un examen).



Conceptos
Cuando es necesario, aparecen resaltados los conceptos, algoritmos o información importante.



Puestas en común
Dinámicas grupales para comparar o validar respuestas y explicar o justificar métodos de resolución. Se resaltan mediante un recuadro de color. Aprovecha las puestas en común para corregir los errores que hayas tenido al resolver las actividades y para comentar las dudas y las dificultades a las que te enfrentaste.

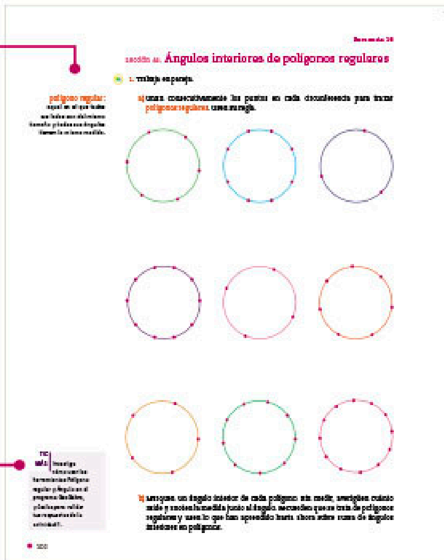
CÁPSULAS

En tu libro encontrarás diferentes cápsulas que amplían la información del contenido estudiado.

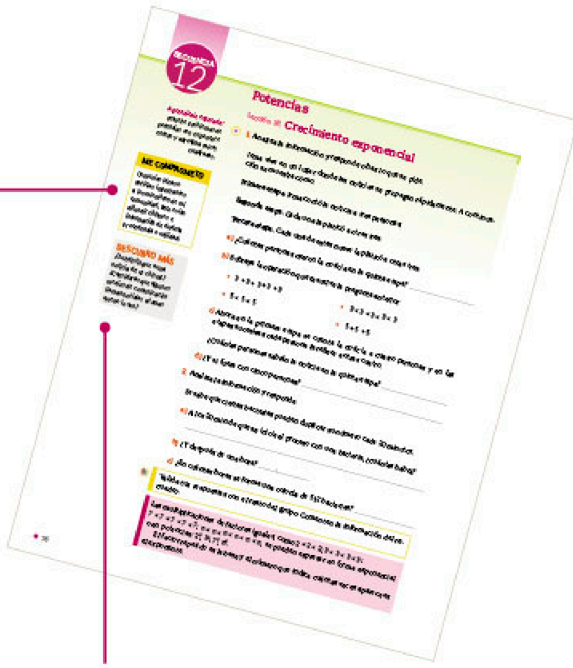
En contexto
Preguntas que incitan la observación y el análisis de tu contexto.

Más libros
Sugerencias de lecturas que se relacionan con los contenidos matemáticos de la lección.

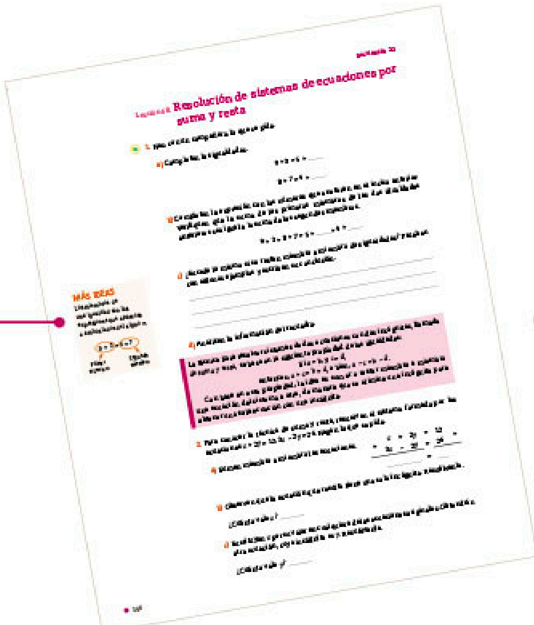
Glosario
Significado de conceptos nuevos o de palabras que en matemáticas tienen un sentido diferente al usual.



Me comprometo
Sugerencias de acciones para que mejores la convivencia escolar, tu proceso de aprendizaje y, en general, tu calidad de vida.

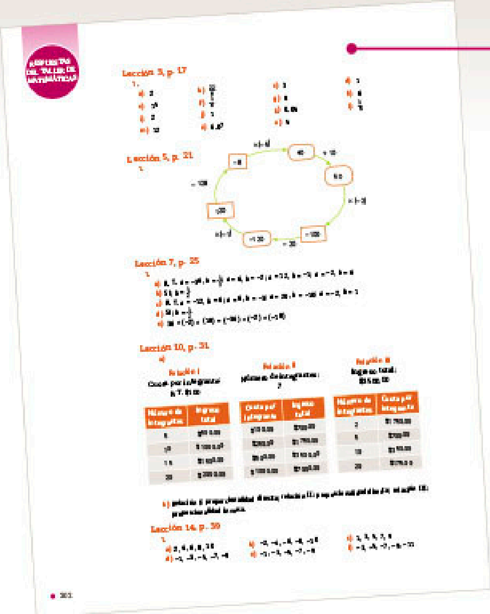


Tic Más
Sugerencias de páginas web y actividades que fortalecen tu aprendizaje.



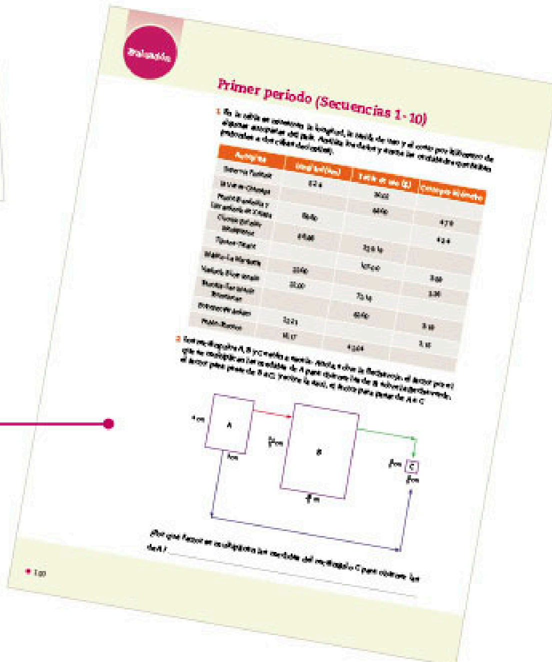
Más ideas
Información complementaria o sugerencias para resolver una actividad.

Descubro Más
Preguntas para ampliar lo aprendido y desarrollar el pensamiento matemático.



Respuestas del taller de matemáticas

En las páginas 202 a 207 encontrarás las respuestas del taller de matemáticas. Verificarlas te servirá para que valores lo que has aprendido y sepas qué te falta por aprender, para que detectes errores y trates de corregirlos. Estos son buenos momentos para que compartas tus dudas con otros compañeros o con el profesor.


Primer periodo (Secuencias 1 - 10)

Evaluaciones finales

Actividades diversas para evaluar lo aprendido.

Bibliografía

Recomendaciones de libros para los que gustan de las matemáticas.

Índice

SECUENCIA 1

Multiplicación y división de fracciones y decimales

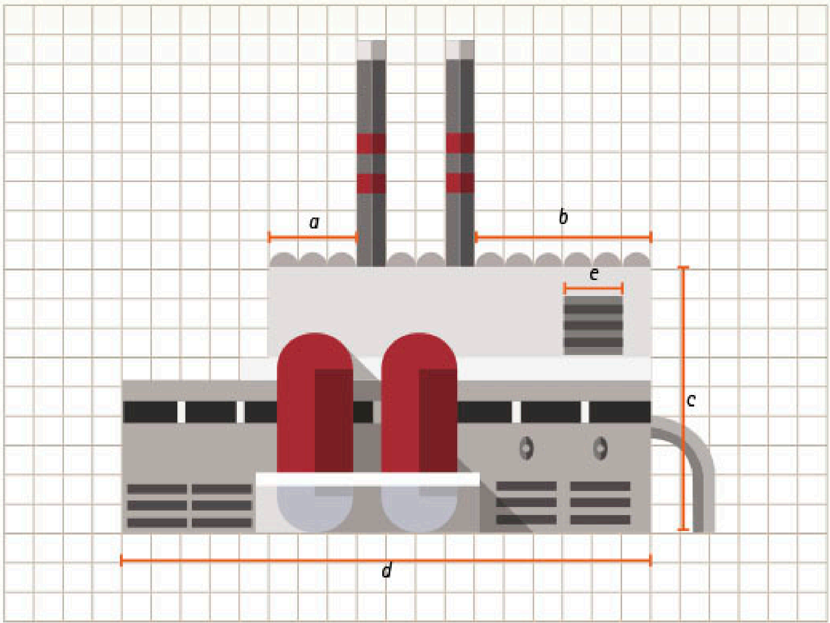
Aprendizaje esperado: resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Lección 1. Factores de escala sucesivos

Analiza la información y haz lo que se pide.

- Al aplicar el factor de escala 1.5 al dibujo A_1, se obtiene el dibujo A_2.

Dibujo A_1



- Al aplicar el factor de escala 2 al dibujo A_2, se obtiene el dibujo A_3.

a) Traza los dibujos A_2 y A_3 en una hoja cuadriculada.

b) Averigua qué factor de escala permite pasar directamente del dibujo A_1 al A_3 sin necesidad de calcular las medidas de A_2. Luego, aplica ese factor a las medidas de A_1 y verifica que las medidas resultantes sean las mismas que las del dibujo A_3 que trazaste antes.

MÁS IDEAS

Cuando dos figuras están a escala, las medidas de los lados de una figura son proporcionales a las medidas de la otra y, por tanto, existe un número (siempre el mismo), que, al multiplicarlo por cualquier medida de una figura, se obtiene la correspondiente medida de la otra. Ese número es el *factor de escala* o *constante de proporcionalidad*.

Reúnete con un compañero y analicen si usaron la siguiente técnica para pasar directamente del dibujo A_1 al A_3. Si no la usaron, háganlo ahora y verifiquen que se obtenga el mismo resultado.

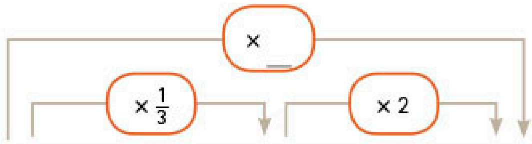
Aplicar dos factores de proporcionalidad, n y m, uno después de otro, equivale a emplear directamente el factor $n \times m$.

1. Trabaja con un compañero. Respondan y hagan lo que se pide.

   a) Al aplicar el factor de escala $\frac{1}{3}$ al dibujo A_1, se obtiene A_4. Al aplicar el factor 2 a A_4, se obtiene A_5.

   - Expliquen qué dibujo es más grande: A_1 o A_5.

b) Calculen y anoten, en la tabla, las medidas de A_4 y A_5. Consideren como unidad de medida (u) el lado de un cuadrito de la cuadrícula.



	Dibujo A_1 (u)	Dibujo A_4 (u)	Dibujo A_5 (u)
Lado a	3		
Lado b	6		
Lado c	9		
Lado d	18		
Lado e	2		

c) Hagan el dibujo A_5 en papel cuadriculado.

d) ¿Qué factor de escala, aplicado al dibujo A_1, permite obtener el dibujo A_5? Anótenlo en el óvalo superior del esquema junto a la tabla anterior.

Reúnanse con el resto del grupo para validar sus respuestas. Hagan lo siguiente.

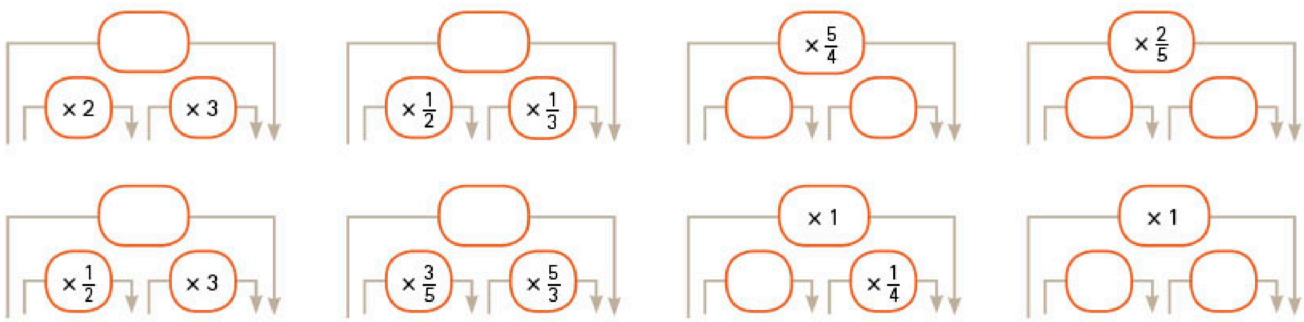
- Comparen sus dibujos A_5. Si no son iguales, identifiquen la causa. Comenten si A_5 es mayor o menor que A_1 y argumenten por qué.
- Comparen sus respuestas del inciso d) en la actividad 2 y verifiquen que se relacione con la información del siguiente recuadro.

Aplicar los factores $\frac{1}{m}$ y n, sucesivamente, equivale a usar el factor $\frac{1}{m} \times n$, es decir, $\frac{n}{m}$.

Recíprocamente, aplicar el factor $\frac{n}{m}$ equivale a aplicar dos factores uno después de otro: $\frac{1}{m}$ y n.

TIC MÁS Practica la multiplicación de fracciones en www.redir.mx/SCMM2-013a.

2. Escribe lo que falta.



Lección 2. Factores inversos

1. Se aplicó el factor de escala 4 a una figura B_1 y se obtuvo B_2.

a) Se conocen las medidas de B_2, pero no las de B_1. Calcúlalas y escríbelas en la tabla.

b) ¿Qué factor se debe aplicar a la figura B_2 para obtener B_1? Anótalo en el óvalo inferior de la tabla.

c) De manera más general, si el factor que se aplica a una figura para obtener otra es $\times\, n$, ¿cuál es el **factor inverso**, es decir, el que aplicado a la segunda figura produce la figura original?

factor inverso: aquel que revierte la acción de otro. Por ejemplo, multiplicar por $\frac{1}{5}$ revierte la acción de multiplicar por 5 y viceversa. Es decir, 5 y $\frac{1}{5}$ son factores inversos uno del otro.

× 4

	Figura B_1	Figura B_2
Lado *a*		4
Lado *b*		1
Lado *c*		8
Lado *d*		3

2. Trabaja con un compañero. Anoten los factores que faltan en la tabla.

Factor	2	$\frac{1}{10}$			$\frac{3}{2}$
Factor inverso			5	$\frac{1}{3}$	

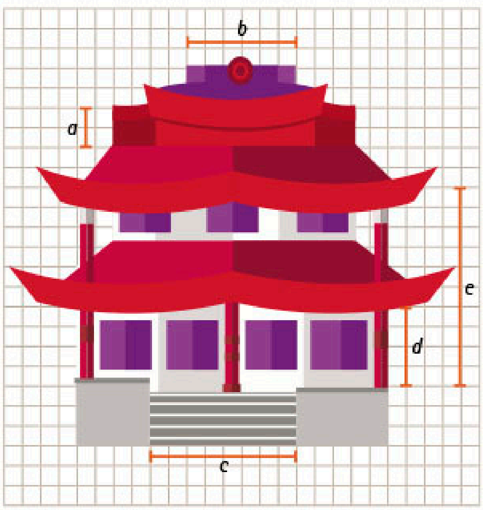
MÁS IDEAS

El inverso multiplicativo de un número es el que multiplicado por él da 1. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$, pues $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$.

Validen sus respuestas de la tabla con el resto del grupo. Después, comenten la información del recuadro.

Para revertir la acción de multiplicar por n, se aplica la operación inversa: dividir entre n o, lo que es lo mismo, multiplicar por $\frac{1}{n}$.

Figura C_2



3. Al aplicar el factor de escala $\frac{2}{5}$ a una figura C_1, se obtuvo C_2.

a) ¿Qué figura es mayor: C_1 o C_2?

____

- ¿Por qué? ______________________

____

____

____

b) Se tiene la figura C_2, pero no la figura C_1. Calculen las medidas de C_1 y escríbanlas en la tabla.

× $\frac{2}{5}$

	Figura C_1	Figura C_2
Lado *a*		2
Lado *b*		6
Lado *c*		8
Lado *d*		4
Lado *e*		10

Analicen, en grupo y con ayuda del profesor, la información del recuadro, y úsenla para completar la tabla y calcular los factores inversos en los óvalos inferiores.

Una forma de encontrar las medidas de C_1 es aplicar a C_2 el factor inverso de $\frac{2}{5}$.

El factor $\frac{2}{5}$ equivale a aplicar sucesivamente los factores $\frac{1}{5}$ y 2.

Por tanto, para "desandar el camino" basta aplicar los inversos de esos factores: 5 y $\frac{1}{2}$.

Así, el factor inverso de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

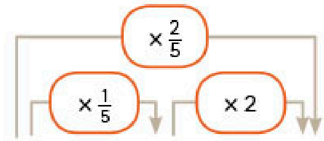
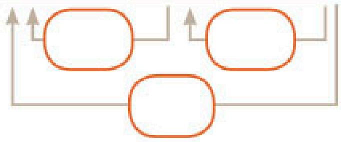
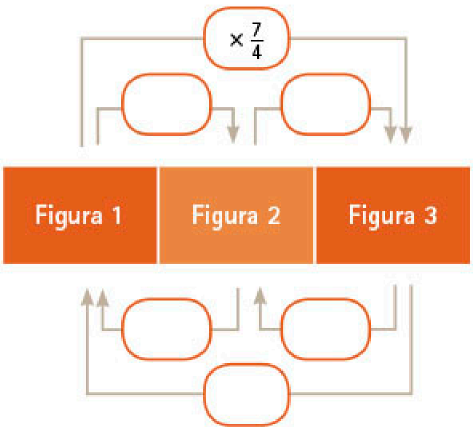
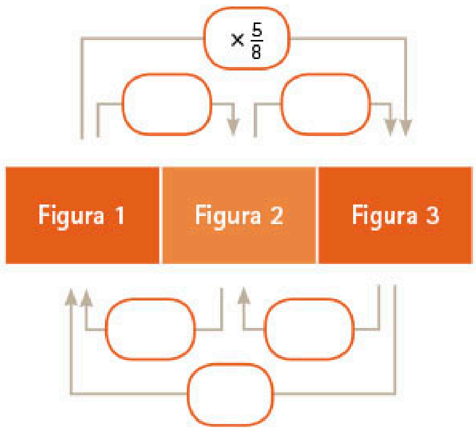


	Figura C_1		Figura C_2
Lado *a*			2
Lado *b*			6
Lado *c*			8
Lado *d*			4
Lado *e*			10



4. Anota los factores que faltan en los diagramas.





DESCUBRO MÁS

A una figura se aplica el factor $\frac{2}{5}$ y a la figura resultante se aplica el factor inverso de $\frac{2}{5}$, es decir, $\frac{5}{2}$. ¿La figura final será mayor, menor o del mismo tamaño que la original?

5. Trabaja con un compañero. Respondan con base en las actividades de esta lección y la anterior.

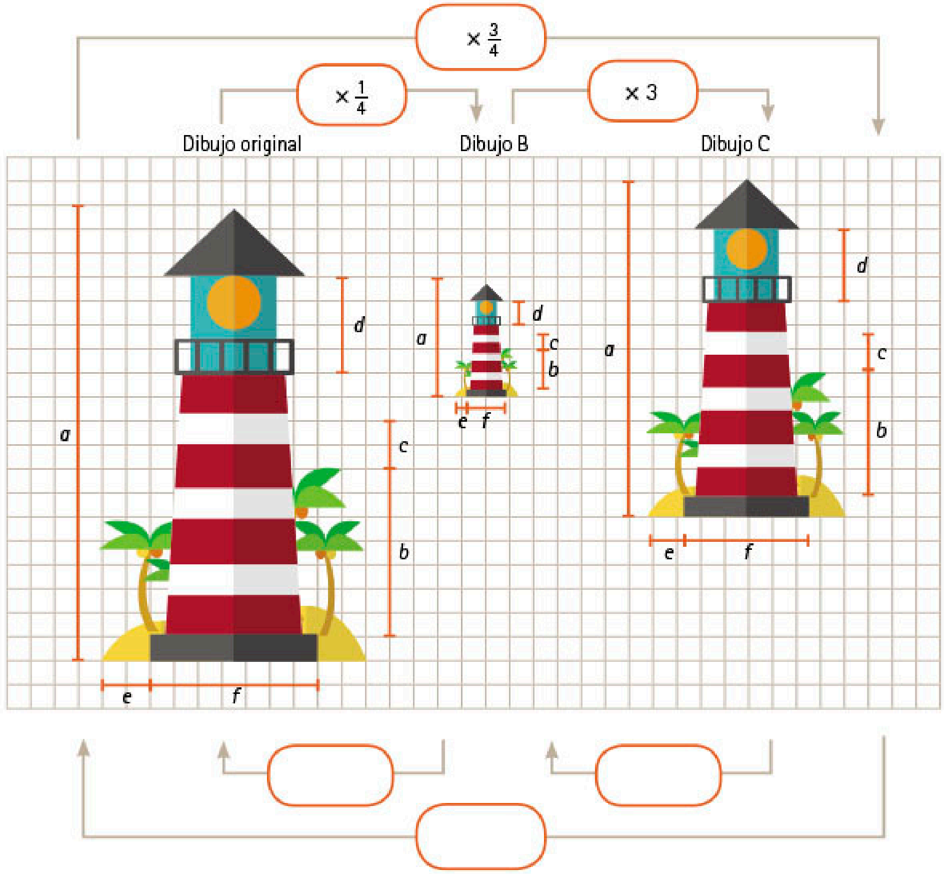
a) ¿Cuál es el factor equivalente a multiplicar por $\frac{3}{4}$ y después por $\frac{2}{3}$?

b) En general, ¿cuál es el factor equivalente a multiplicar por $\frac{a}{b}$ y luego por $\frac{c}{d}$?

c) ¿Qué le ocurre a una figura al aplicar un factor y después su inverso?

Lección 3. Desandar el camino. El factor inverso y la división

1. Se muestran tres dibujos: el dibujo original A y los dibujos B y C.



DESCUBRO MÁS
Multiplicar por $\frac{1}{4}$ equivale a dividir entre... ¿cuánto?

a) Si el factor de escala $\frac{1}{4}$ se aplica al dibujo original A, se obtiene el dibujo B.

¿Cuál es el factor de escala que, aplicado a B, proporciona las medidas del dibujo original A? ______

b) Si el factor de escala 3 se aplica a B, se obtiene C.

¿Cuál es el factor inverso de 3? ______

c) Si el factor de escala $\frac{3}{4}$ se aplica al dibujo original A, se obtiene C.

¿Cuál es el factor inverso de $\frac{3}{4}$? ______

d) Anota los factores de escala inversos en los óvalos de la parte inferior del dibujo anterior.

Compara tus respuestas con las del grupo. Comenten la información del siguiente recuadro.

Hay dos maneras de revertir la acción de multiplicar un número n por $\frac{3}{4}$.

Una consiste en multiplicar n por el factor inverso de $\frac{3}{4}$, que es $\frac{4}{3}$; es decir, $n \times \frac{4}{3}$. La otra es recordar que la división revierte lo que hace la multiplicación; entonces, para revertir $n \times \frac{3}{4}$, se divide $n \div \frac{3}{4}$.

Las dos maneras de revertir lo que hace la multiplicación son equivalentes: $n \times \frac{4}{3} = n \div \frac{3}{4}$.

De manera general, para dividir un número n entre una fracción $\frac{a}{b}$, se puede multiplicar n por el inverso multiplicativo de la fracción $\frac{a}{b}$, es decir por $\frac{b}{a}$.

2. Resuelve las divisiones como en el ejemplo.

a) $6 \div \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$
b) $2 \div \frac{9}{10} =$ ______
c) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$ ______
d) $10 \div \frac{1}{5} =$ ______

3. Responde en tu cuaderno. Si el factor de escala $\times$ 0.2 se aplica a una figura, ¿esta se amplía o se reduce? ¿Cuál es el factor recíproco de $\times$ 0.2?

4. Resuelve las divisiones.

a) $7 \div 0.1 = 7 \div \frac{1}{10} =$ ______
b) $3 \div 0.25 =$ ______

MÁS IDEAS
Para encontrar el factor inverso de un número decimal conviene escribirlo en forma de fracción; por ejemplo, $0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

divisor: en una división, el número entre el que se divide se denomina *divisor*.

$a \div b = c$

Dividendo → a; Divisor → b; Cociente → c

Taller de matemáticas

1. Analiza las técnicas para resolver una división cuando el divisor no es entero. Después, resuelve, en tu cuaderno, las divisiones que se muestran con el método que prefieras.

Técnica 1 (solo sirve para dividir decimales)
Multiplicar ambos términos por una potencia de 10 (10, 100, 1000...) para obtener una división equivalente (con el mismo cociente), pero con dividendo y divisor enteros, por ejemplo:
- 1.7 ÷ 0.1 = 17 ÷ 1 (ambos términos se multiplicaron por 10) = 17;
- 3.5 ÷ 0.05 = 350 ÷ 5 (se multiplicó por 100) = 70.

Técnica 2 (para fracciones)
Multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor:
- $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$;
- $2 \div 0.1 = 2 \div \frac{1}{10}$ (se convirtió el divisor en fracción) $= 2 \times \frac{10}{1} = 2 \times 10 = 20$;
- $0.25 \div 0.33 = \frac{25}{100} \div \frac{33}{100} = \frac{25}{100} \times \frac{100}{33} = \frac{25}{33}$.

a) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$
b) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{11}$
c) $1.5 \div 0.5$
d) $\frac{1}{5} \div 0.2$
e) $5 \div \frac{1}{3}$
f) $\frac{1}{10} \div \frac{100}{125}$
g) $2 \div 0.25$
h) $\frac{3}{5} \div 0.1$
i) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3}$
j) $\frac{4}{5} \div \frac{4}{5}$
k) $0.5 \div 10$
l) $0.1 \div \frac{3}{5}$
m) $1\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$
n) $1.7 \div 0.28$
o) $0.025 \div 0.005$

MÁS IDEAS
Para ciertos casos particulares, hay formas simples de resolver una división; por ejemplo, se puede saber que $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$ al observar que $\frac{1}{4}$ "cabe" exactamente dos veces en $\frac{1}{2}$.

SECUENCIA 2

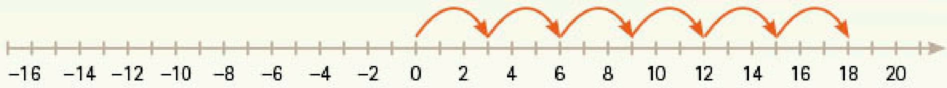
Números con signo I

Lección 4. Multiplicación de enteros

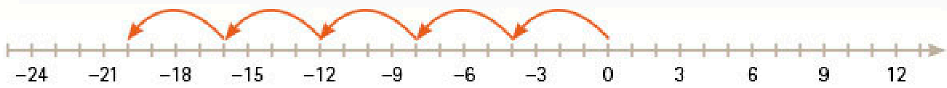
Aprendizaje esperado: resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales, positivos y negativos.

1. Con base en lo que se muestra en las rectas, haz lo que se indica.

Recta A



Recta B



a) Expresa, mediante una suma y una multiplicación, lo que indican las flechas en las rectas A y B.

Recta A

- Suma: ______________________
- Multiplicación: ______________

Recta B

- Suma: ____________________________
- Multiplicación: ____________________

b) Representa, con flechas en la recta A, la multiplicación $5 \times (-2) = -10$.

c) Representa, con flechas en la recta B, la multiplicación $2 \times 5 = 10$.

MÁS IDEAS

Una multiplicación de números enteros se expresa de distintas maneras.

- Con el símbolo de multiplicación:

  $4 \times (-3)$

- Solo con paréntesis:

  $(4)(-3)$; $4(-3)$

- Cuando se usan literales, no hay signos de por medio; por ejemplo, $5a$ significa "5 por a", $-5a$ significa "menos 5 por a", ab significa "a por b".

Analiza la información y, con base en ella, revisa tus resultados de la actividad 1.

Una suma de sumandos iguales como $(-5) + (-5) + (-5)$ puede expresarse mediante la multiplicación $3 \times (-5)$, que se lee "tres veces menos cinco", o bien, $(-5) \times 3$, que se lee "menos cinco, tres veces". En ambos casos el resultado es -15.

2. Anota lo que falta en la tabla.

Expresión verbal	Suma y resultado	Multiplicación y resultado
Cuatro veces −7	$(-7) + (-7) + (-7) + (-7) = -28$	$(4)(-7) = -28$
	$(-9) + (-9) + (-9) =$ __________	
		$(-6)(5) = -30$
Cuatro veces $-a$		
		$= -20$

En grupo y con ayuda del profesor, revisa tus respuestas de la tabla. Hay un renglón en el que puede haber resultados diferentes, pero correctos.

3. Trabaja en equipo. Analicen la tabla de multiplicar y hagan lo que se indica para llenarla.

a) Localicen la fila y la columna en las que todos los resultados son 0 y llénenlas; la tabla quedará dividida en cuatro partes.

b) Tres de las cuatro partes en las que quedó dividida la tabla contienen multiplicaciones que ya conocen: se multiplican dos números de distinto signo o dos números positivos. Llenen las celdas correspondientes.

c) En la parte que falta se multiplican dos números negativos. Para encontrar los resultados, analicen la sucesión de números en cada columna o fila de la tabla.

×	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
4								12	
3									
2									
1									
0									
−1									
−2									
−3							−6		
−4									

DESCUBRO MÁS

Si se multiplican dos números negativos cualesquiera, ¿qué tipo de número se obtiene: positivo, negativo o cero?

4. Responde en tu cuaderno las preguntas.

a) ¿Cuál es el mayor producto que aparece en la tabla? ¿Y el menor?

b) ¿Cómo obtuvieron los productos de dos factores negativos?

c) Busca, en la tabla, cuatro multiplicaciones cuyo producto sea 8 y anótalas.

Valida con el resto del grupo tus resultados de las actividades 3 y 4. Concluyan, con ayuda del profesor, qué tipo de número es el producto de dos números negativos. Después, comenten la información del recuadro.

Si a y b son números positivos...

- El producto de dos números positivos siempre es un número positivo: $(a)(b) = ab$.
- El producto de dos números negativos siempre es un número positivo: $(-a)(-b) = ab$.
- El producto de un número positivo por uno negativo, o viceversa, es un número negativo: $(a)(-b) = (-a)(b) = -ab$.

Lección 5. Multiplicaciones con varios factores

MÁS IDEAS
Si hay un número par de factores negativos, el resultado es positivo. Si hay un número impar de factores negativos, el resultado es negativo.

MÁS IDEAS
Los paréntesis también indican multiplicación; por ejemplo, en lugar de $(-5) \times (4) \times (-3)$ se escribe $(-5)(4)(-3)$.

1. Trabaja con un compañero. Resuelvan las multiplicaciones.

a) $2 \times 3 \times (-1) =$ ______ b) $(-4) \times 3 \times (-2) \times 1 =$ ______

c) $(-5)(4)(-3)(2)(-1) =$ ______ d) $(-5)(4)(-3)(-2)(-1) =$ ______

e) $(-6) \times 9 \times (-1) =$ ______ f) $(-4) \times 8 \times 0 =$ ______

2. Inventa tres multiplicaciones de seis factores: una en la que el resultado sea positivo, otra en la que sea negativo, y una cuyo resultado sea 0. Anótalas enseguida.

- Resultado positivo: ______________________________
- Resultado negativo: ______________________________
- Resultado 0: ______________________________

Comenta, en grupo, en qué casos el resultado de una multiplicación de más de dos factores es positivo, cuándo es negativo y cuándo, 0. Anoten sus conclusiones.

Primera conclusión: el resultado es positivo cuando… ______________________________

____

Segunda conclusión: el resultado es negativo cuando… ______________________________

____

Tercera conclusión: el resultado es 0 cuando… ______________________________

____

3. Completa las multiplicaciones de acuerdo con las conclusiones anteriores. Verifica tus resultados con calculadora.

a) $(-4) \times (-7) \times (-2) \times 5 =$ ______

b) $(10)(-3)(-4) =$ ______

c) $(-5)(10)(50) =$ ______

d) $(-3) \times (\_\_\_\_) \times 7 = 21$

e) $(-3)(-2)(\_\_\_\_) = -24$

f) $(-5)(-2)(\_\_\_\_) = -70$

g) $(-1) \times (-8) \times 10 \times (-3) \times (-20) =$ ______

h) $(-3) \times (-2) \times (-1) \times 1 \times (-3) \times 2 =$ ______

4. Anota lo que falta en la tabla y responde.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y		20	15	10						−20	−25

a) ¿Cómo se determinan los valores de y a partir de los de x?

b) Subraya la expresión algebraica que modela esta relación.

- $y = 5x$
- $y = -5x$
- $y = \frac{5}{x}$
- $y = -\frac{5}{x}$

5. Resuelve los problemas.

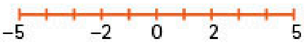
a) El producto de tres números enteros es −30. ¿Qué números son?

b) El producto de dos números opuestos es −81. ¿De qué números se trata?

c) El producto de tres enteros consecutivos es −120. ¿Qué números son?

números enteros: los naturales, sus simétricos y el 0. Por ejemplo, son enteros 5, −7, 1, 0 y −128.

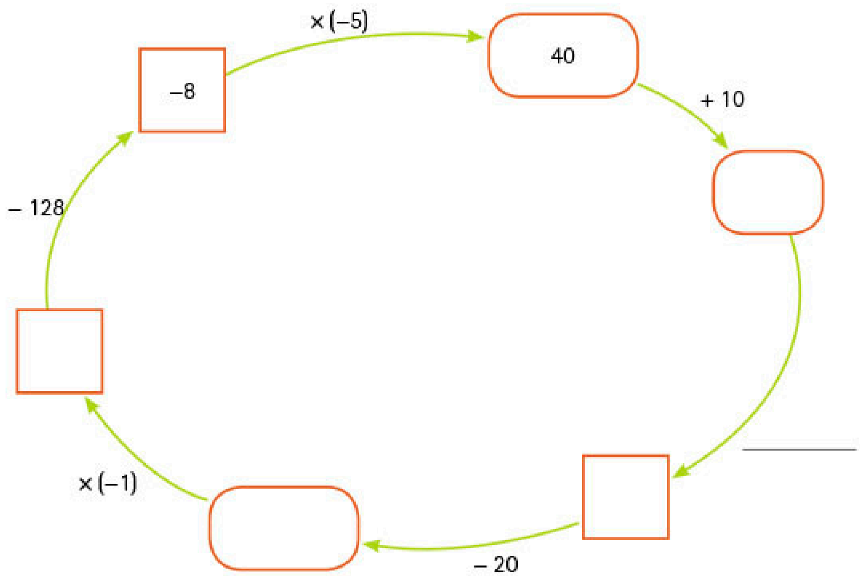
números opuestos: aquellos que están a la misma distancia del 0, en direcciones opuestas. Por ejemplo, son números opuestos −5 y +5; −2 y +2.



enteros consecutivos: números enteros cuya diferencia es una unidad. Por ejemplo, son consecutivos 22 y 23; −15, −14 y −13; −1, 0 y 1.

Taller de matemáticas

1. Anota los resultados y las operaciones faltantes.



Lección 6. División de enteros

1. Trabaja en equipo. Calculen, en cada caso, el factor faltante. Pueden usar calculadora.

a) $(-7) \times \_\_\_\_ = -14$ b) $(-7) \times \_\_\_\_ = 14$

c) $\_\_\_\_ \times (-15) = 345$ d) $\_\_\_\_ \times (15) = 345$

e) $(16) \times \_\_\_\_ = -192$ f) $\_\_\_\_ \times (17) = -204$

g) $(-25) \times \_\_\_\_ = 925$ h) $(-5) \times \_\_\_\_ = -170$

DESCUBRO MÁS

¿Se podrán hacer dos divisiones diferentes si en la multiplicación los dos factores son números opuestos?, ¿y si los dos factores son iguales?

2. Con cada multiplicación que resolvieron en la actividad 1 se pueden escribir dos divisiones. Anoten las divisiones y resuélvanlas.

Multiplicación	Primera división	Segunda división
$(-7) \times (2) = -14$	$(-14) \div (-7) = 2$	$(-14) \div (2) = -7$
$(-7) \times (\_\_\_) = 14$		
$(\_\_\_) \times (-15) = 345$		
$(\_\_\_) \times (15) = 345$		
$(16) \times (\_\_\_) = -192$		
$(\_\_\_) \times (17) = -204$		
$(-25) \times (\_\_\_) = 925$		
$(-5) \times (\_\_\_) = -170$		

Validen en grupo sus respuestas de la actividad anterior. Después, analicen la información del recuadro y anoten en su cuaderno ejemplos con números concretos para cada caso.

- El cociente de dos números positivos, o de dos números negativos, es un número positivo.
- Al dividir un número positivo entre uno negativo, o uno negativo entre uno positivo, se obtiene un número negativo.
- El cociente de un número, positivo o negativo, entre 1 es el mismo número.
- Al dividir un número cualquiera entre −1 se obtiene el opuesto del número.
- El cociente de dividir 0 entre cualquier número, positivo o negativo, es 0.
- El cociente de dividir un número cualquiera entre 0 no está definido; es decir, la división entre 0 no es una operación válida en matemáticas.

3. Resuelve, en equipo, lo siguiente.

a) Encuentren al menos tres sumas diferentes cuyo resultado sea −15.

b) Anoten al menos tres restas cuyo resultado sea −10.

c) Hallen al menos tres multiplicaciones cuyo producto sea −20.

d) Escriban al menos tres divisiones cuyo cociente sea −8.

4. Hagan lo que se pide y respondan.

a) Encuentren dos números enteros...

- que sumados den 1 y multiplicados, −156:
- que restados den −6 y multiplicados, 16:
- cuyo cociente sea −4 y su producto, −36:
- que sumados den 10 y multiplicados, −24:
- que difieran en 12 unidades y su cociente sea −5:

b) ¿Será cierto que el doble de cualquier número siempre es mayor que el número? Si piensan que no, den un contraejemplo; si opinan que sí, expliquen por qué.

c) ¿Será cierto que la mitad de cualquier número siempre es menor que el número? Si piensan que no, den un contraejemplo; en caso contrario, expliquén por qué.

Comparen sus resultados de las actividades 3 y 4 con los de otro equipo. Si hay diferencias, encuentren los errores y corríjanlos.

MÁS IDEAS

En grados anteriores aprendiste que algunas restas dan como resultado un número negativo; por ejemplo, −8 − (−3) = −5.

contraejemplo: excepción que muestra que una afirmación de tipo general es falsa. Por ejemplo, para la afirmación "Todas las aves vuelan", el pingüino es un contraejemplo (un ave que no vuela).

Lección 7. Multiplicación y división de enteros

1. Trabaja en equipo. Anoten lo que falta en la tabla.

	6	−3	0	−1	x
El doble de					
La mitad de					
El antecesor de					
El sucesor de					
El cuadrado de					
Un tercio de					
	18	−9	0	−3	$3x$

antecesor y sucesor: el antecesor de un número entero es el que está una unidad antes; el sucesor, el que está una unidad después.

cuadrado de un número: aquel que se obtiene al multiplicar por sí mismo el número original; por ejemplo, el cuadrado de 3 es 9, pues $3 \times 3 = 9$, y 100 es el cuadrado de 10, pues, $10 \times 10 = 100$. Para representar el cuadrado de un número se usa la siguiente notación:
$1^2 = 1 \times 1 = 1$,
$2^2 = 2 \times 2 = 4$,
$3^2 = 3 \times 3 = 9$,
$4^2 = 4 \times 4 = 16$,
$5^2 = 5 \times 5$...

2. Resuelvan los problemas.

a) Si al triple de un número se le suma 5, se obtiene −7. ¿De qué número se trata?

b) Si al antecesor de un número se le resta −5, el resultado es 15. ¿De qué número se trata?

c) Pienso un número, lo multiplico por −2 y al resultado le sumo 12; obtengo −4. ¿Qué número pensé?

d) Pienso un número, lo divido entre −3 y al resultado le sumo −9; obtengo −6. ¿Qué número pensé?

e) Al sucesor de un número lo multipliqué por −4 y al resultado le sumé −6; obtuve 10. ¿Cuál es el número?

f) Multipliqué un número por −5, luego dividí el resultado entre 7 y obtuve 5. ¿Cuál es el número?

3. Anoten los resultados que faltan en la tabla.

a	b	$a + b$	$a - b$	$a \times b$	$a \div b$
	−3	5			
−98			−3		$\frac{3}{2}$
−5	2				
8		11			
	−3			15	
−6	3				
−16					−4
43				0	
		−7	−5		

Taller de matemáticas

1. Haz lo que se indica.

a) Considera la expresión $ab = -12$ y encuentra cuatro parejas de valores para a y b que hagan la igualdad anterior verdadera. Por ejemplo, una solución es $a = -3$ y $b = 4$, pues $-3 \times 4 = -12$.

____

b) En el problema anterior, ¿consideras que a podría valer −24? ____________

Si crees que sí, ¿cuánto valdría b? ________

c) Considera la expresión $a \div b = -2$ y anota cuatro parejas de valores para a y b que hagan la igualdad anterior verdadera.

____

d) En el problema anterior, ¿piensas que a podría valer −1? ____________

Si crees que sí, ¿cuánto valdría b? ________

e) Agrega el número que falta para que la igualdad sea verdadera.

$36 \times (-2) \times (\ \_\_\_\ ) = (-36)(-2)(-18)$

MÁS IDEAS

Cuando se usan literales, no se pone el signo × para indicar multiplicación (para no confundirlo con la literal x). Por ejemplo, en lugar de $5 \times a$, se anota simplemente $5a$, en lugar de $a \times b$, se escribe ab.
También suele omitirse el signo × cuando se usan paréntesis. Por ejemplo, 5(−23), significa 5 por −23.

SECUENCIA 3

Proporcionalidad I

Lección 8. ¿Si una cantidad aumenta, pasa lo mismo con la otra?

Aprendizaje esperado: resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

1. Trabaja con un compañero. Calculen los datos que faltan en cada tabla. Si algún dato no puede calcularse, tachen la casilla correspondiente.

DESCUBRO MÁS

Cuando Mario entró a la primaria, su edad era la mitad de la de Luisa. ¿En algún otro momento la edad de Luisa es el doble de la de Mario?

Tabla 1

Cuando Mario nació, Luisa tenía 6 años de edad.

Acontecimiento	Edad de Mario	Edad de Luisa
Mario entra a la primaria.		12
Luisa termina la licenciatura.	18	
Luisa tiene su primer hijo.		36
Mario tiene su primer hijo.	42	

Tabla 2

Un taxi cobra $13.10 por el servicio más $1.50 por cada 250 m.

Kilómetros recorridos	Precio del recorrido ($)
3	
6	
15	103.10
30	

Tabla 3

Para hacer un pastel se requiere hornear durante 45 min a 200°.

Número de pasteles que se hornean al mismo tiempo	Tiempo de horneado (min)
1	45
2	
3	

Tabla 4

La renta de una casa cuesta $6 000.00.

Si la pagan entre...	A cada quien le corresponde pagar ($)
2 personas	
3 personas	2 000.00
4 personas	
6 personas	

Tabla 5

Todas las cajas tienen la misma cantidad de chocolates.

Número de cajas	Número de chocolates
3	36
6	
10	
12	

Tabla 6

Un disco tiene 20 canciones.

Número de canciones reproducidas	Tiempo transcurrido desde que se pone la primera canción (min)
1	3
2	7
3	9
4	

Tabla 7

La escuela está a 20 km de la casa.

Velocidad promedio del trayecto (km/h)	Duración del trayecto (h)
5	4
10	
20	
60	

Tabla 8

Un automóvil se desplaza con velocidad constante de 90 km/h.

Tiempo transcurrido (h)	Distancia recorrida (km)
1	
2	
3	
4	

2. Trabaja en grupo y con ayuda del profesor. Identifiquen e indiquen en qué tablas de la actividad anterior se cumple cada característica.

Característica de la relación	Tablas en las que se cumple
1. Cuando una cantidad de un conjunto aumenta dos, tres o *n* veces, la cantidad correspondiente del otro conjunto también aumenta ese mismo número de veces.	
2. Al dividir un número de un conjunto entre el número correspondiente del otro conjunto, siempre se obtiene el mismo resultado (el cociente es constante).	
3. Cuando una cantidad de un conjunto aumenta dos, tres o *n* veces, la correspondiente cantidad del otro conjunto disminuye ese mismo número de veces.	
4. Al multiplicar un número de un conjunto por el número correspondiente del otro conjunto, siempre se obtiene el mismo resultado (el producto es constante).	

Verifiquen que las características 1 y 2 las cumplen las mismas tablas; lo mismo sucede con las características 3 y 4. Comenten la siguiente información.

La relación entre las cantidades de dos conjuntos puede ser de varios tipos:

Cuando se cumple la característica 1, o bien, cuando se cumple la característica 2, se dice que las cantidades de un conjunto son *directamente proporcionales* a las del otro.

Cuando se cumple la característica 3, o bien, cuando se cumple la 4, las cantidades de un conjunto son *inversamente proporcionales* a las del otro.

También hay relaciones donde no se cumple ninguna de las cuatro características anteriores, es decir, no hay proporcionalidad (ni directa ni inversa).

DESCUBRO MÁS

Escribe, en tu cuaderno, más ejemplos de dos conjuntos de cantidades que...

- sean directamente proporcionales;
- sean inversamente proporcionales;
- no sean proporcionales (ni directa ni inversamente).

Lección 9. Entre más largo un lado, más corto el otro

1. Traza, en papel cuadriculado, todos los rectángulos posibles con una superficie de 36 cuadros. Por ejemplo, un lado A de 1 unidad y un lado B de 36 unidades. Anota sus dimensiones en la tabla.

DESCUBRO MÁS
Si se consideran fracciones y números decimales, ¿cuántas parejas de números hay cuyo producto es 36?

	Rectángulos con área de 36 unidades cuadradas								
Medida del lado A									36
Medida del lado B									1

Reúnete con dos o tres compañeros. Comparen las medidas de sus rectángulos y discutan si su tabla está completa o si se pueden agregar más medidas que cumplan con las condiciones mencionadas.

2. Responde, en tu cuaderno, las preguntas acerca de las medidas anteriores.

a) ¿Qué sucede con la medida del lado B cuando la del lado A aumenta al doble, por ejemplo, al pasar de 18 a 36?

b) ¿Qué sucede con la medida de A cuando la de B disminuye a la tercera parte, por ejemplo, al pasar de 6 de 2?

c) ¿Qué tienen en común los productos que se obtienen al multiplicar las medidas de A y B?

d) La relación que hay entre las medidas posibles del lado A y las medidas posibles del lado B, ¿es de proporcionalidad directa, inversa, o ninguna de las dos? Explica tu respuesta.

Verifica, en grupo y con ayuda del profesor, si todos están de acuerdo con el tipo de relación que se trata y en cómo justificarla.

3. Calcula, para cada situación, los valores que faltan en la tabla. Indica, en la última fila, si es un caso de proporcionalidad directa o inversa, o si no hay proporcionalidad.

a) Quedan 2 000 L de agua en la reserva.

Si se consumen diario...	alcanza para...
10 L	días
20 L	días
30 L	días

b) Un vehículo consume 1 L de gasolina para recorrer 13 km.

L	km
100	
200	
500	

c) Un automovilista debe recorrer 600 kilómetros.

Si va a...	tardará...
60 km/h	
100 km/h	
120 km/h	

d) La tarifa de un taxi es de \$12.50 más \$7.00 por kilómetro.

km	Cantidad que se pagará (\$)
1	
2	
4	

¿Cuál es la tarifa normal de un taxi en tu localidad?

e) Varios niños se van juntos de la escuela al parque.

Número de niños que hacen el recorrido	Distancia que recorre cada uno (km)
2	5
4	
10	

f) Un gimnasio cobra una cuota fija mensual más un cargo extra por cada vez que se usa un casillero.

Veces en el mes que se usó un casillero	Costo total (\$)
5	600.00
6	620.00
10	

4. Se quiere construir una cisterna de 60 m³ en forma de prisma rectangular. Entre más chica sea la base, más profunda deberá ser la cisterna. Completa la tabla para obtener las medidas de profundidad que corresponden a cada área de la base.

Área de la base (m^2)	40	30	25	20	15	12	10
Profundidad (m)							6
Volumen (m^3)	60						

Haz, con tus compañeros y con ayuda del profesor, lo siguiente.

- Comenten qué magnitudes de la tabla son inversamente proporcionales; es decir, que cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye en la misma proporción.
- Comparen los procedimientos que utilizaron para calcular la profundidad de la cisterna. Observen que casi siempre hay más de una manera de obtener ese dato, por ejemplo, al pasar de 40 m^2 a 20 m^2, el área de la base disminuye a la mitad, por tanto, ¿cómo debe variar la profundidad (para mantener constante el volumen)?

Lección 10. Crear situaciones de proporcionalidad

1. Analiza cómo crear tres relaciones de proporcionalidad y haz lo que se indica.

- Primero se plantea una situación multiplicativa, por ejemplo: "Un automóvil viaja con velocidad constante. El producto de la velocidad por la cantidad de tiempo es igual a la distancia recorrida en ese tiempo".

- Para crear la primera relación se define un valor para el primer factor, en este caso, se fijará la velocidad a 80 km/h. La distancia recorrida variará en función de la duración del trayecto (el tiempo se mide a partir de que el vehículo alcanza los 80 km/h).

Relación I

Velocidad: 80 km/h

Duración del trayecto (h)	1	2	3.5	5
Distancia recorrida (km)	80	160		

- Para la segunda relación se fija un valor para el otro factor, que es la duración del trayecto, por ejemplo, el trayecto duró 5 horas. La distancia recorrida variará en función de la velocidad.

Relación II

Duración del trayecto: 5 h

Velocidad (km/h)	40	60	80	100
Distancia recorrida (km)	200	300		

- Para la tercera relación se fija el valor del producto, que es la distancia recorrida, por ejemplo, se recorrieron 600 km. La duración del trayecto variará en función de la velocidad.

Relación III

Distancia recorrida: 600 km

Velocidad (km/h)	50	60	75	120
Duración del trayecto (h)	12	10		

a) Completa las tablas anteriores.

b) Indica, en cada caso, si la relación es de proporcionalidad directa o inversa o no es de proporcionalidad.

- Relación I: ____________________
- Relación II: ____________________
- Relación III: ____________________

TIC MÁS Analiza más situaciones de proporcionalidad (directa e inversa) en www.redir.mx/SCMM1-030a.

2. Trabaja en tu cuaderno. Propón otra situación multiplicativa como las de la actividad 1 y haz tres relaciones a partir de ella. Elabora tablas como las anteriores y anota, debajo de cada una, el tipo de proporcionalidad (directa o inversa) y la regla de correspondencia.

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, la situación multiplicativa que propusiste. Verifiquen que las tres relaciones que se originan de ella están bien planteadas: una debe ser de proporcionalidad inversa y las otras dos, de proporcionalidad directa.

Taller de matemáticas

1. Trabaja con un compañero. Consideren la siguiente relación multiplicativa.

La cuota que paga cada integrante de una cooperativa multiplicada por el número de integrantes es igual al ingreso total de la cooperativa.

a) Hagan lo siguiente para plantear tres relaciones.

- Asignen un valor, el que ustedes deseen, a la constante que se indica en el encabezado de cada tabla.
- Establezcan los valores que ustedes quieran para la primera variable (primera columna).
- Calculen los valores de la otra variable (segunda columna).

Relación I
Cuota por integrante: ____________

Número de integrantes	Ingreso total

Relación II
Número de integrantes: ____________

Cuota por integrante	Ingreso total

Relación III
Ingreso total: ____________

Número de integrantes	Cuota por integrante

b) Indiquen si las relaciones son de proporcionalidad directa o inversa, o si no son de proporcionalidad.

- Relación I: ____
- Relación II: ____
- Relación III: ____

DESCUBRO MÁS

¿Qué sucede si se inicia con una situación aditiva en lugar de una multiplicativa? Averígualo planteando las tres relaciones que se derivan al fijar un término en la siguiente situación.

lado a + lado b = semiperímetro del rectángulo

SECUENCIA 4

Variación I

Lección 11. Dos tipos de variación

Aprendizaje esperado: analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

1. A continuación, aparecen tres tablas con datos de relaciones que estudiaste en la lección anterior. Después, se muestran tres gráficas.

a) Analiza y completa cada tabla.

Relación I: entre tiempo y distancia, cuando la velocidad es constante (Velocidad = 80 km/h)

Tiempo (h)	1	2	3.5	5
Distancia (km)	80	160		

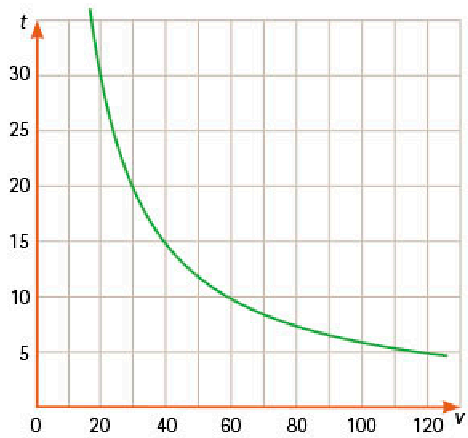
Relación II: entre velocidad y distancia, cuando el tiempo es fijo (Duración del trayecto = 5 h)

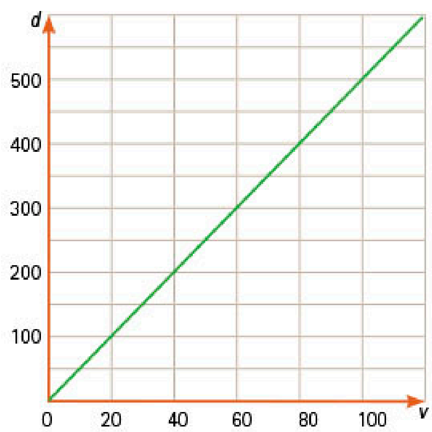
Velocidad (km/h)	20	50	80	100
Distancia (km)				

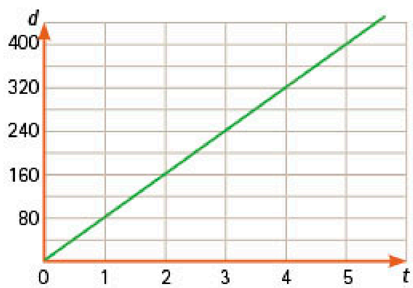
Relación III: entre velocidad y tiempo, cuando la distancia es fija (Distancia recorrida = 600 km)

Velocidad (km/h)	20	40	60	
Tiempo (h)			10	5

b) Anota, junto a cada gráfica, el número de relación (I, II o III) a la que corresponde.







MÁS IDEAS

En matemáticas se usan literales para representar cantidades que varían; por ejemplo, en las gráficas de esta actividad, *t*, *d* y *v* representan el tiempo, la distancia y la velocidad, respectivamente.

2. Trabaja en equipo. Consideren las relaciones de la actividad anterior y hagan lo que se pide.

a) Anoten, para cada característica que se menciona, qué relaciones de la actividad anterior (I, II o III) la cumplen.

Característica de la relación	Relaciones que la cumplen
• Cuando una cantidad de un conjunto aumenta dos, tres o *n* veces, la correspondiente del otro conjunto también aumenta ese mismo número de veces.	
• Al dividir un número de un conjunto entre el que le corresponde del otro conjunto, se obtiene siempre el mismo resultado (el cociente no varía).	
• Cuando una cantidad aumenta dos, tres o *n* veces, la cantidad correspondiente del otro conjunto disminuye ese mismo número de veces.	
• Al multiplicar un número de un conjunto por el correspondiente del otro conjunto, se obtiene siempre el mismo resultado (el producto no varía).	
• La gráfica es una recta que pasa por el origen (0, 0).	
• La gráfica es una curva que se acerca cada vez más a los ejes.	
• La relación es de proporcionalidad directa.	
• La relación es de proporcionalidad inversa.	

DESCUBRO MÁS

En la relación III, si v crece, ¿t crece o decrece?
En la relación II, si v crece, ¿d crece o decrece?
En la relación I, si t crece, ¿d crece o decrece?

b) Anoten, junto a cada regla de correspondencia, a qué relación (I, II o III) corresponde. Consideren que t representa el tiempo; d, la distancia; y v, la velocidad.

• $t = \frac{600}{v}$: ____________ • $d = 80t$: ____________ • $d = 5v$: ____________

Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Comenten la información del recuadro.

Características de una relación de proporcionalidad directa:
- la regla de correspondencia es del tipo $y = kx$, donde k representa un valor dado (constante);
- la gráfica es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano;
- el cociente de cualquier valor de y entre el valor correspondiente de x es constante (es k).

Características de una relación de proporcionalidad inversa:
- la regla de correspondencia es del tipo $y = \frac{k}{x}$;
- la gráfica es una curva que se acerca a los ejes;
- el producto de cualquier valor de x por el correspondiente de y es constante (es k).

Lección 12. Las relaciones $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$

1. Considera otras tres relaciones con las que trabajaste en la secuencia anterior (lección 8). Para cada relación, completa la tabla; después, subraya la expresión algebraica de la regla de correspondencia (entre las cuatro opciones que se muestran); luego traza la gráfica correspondiente; por último, escribe qué tipo de relación es (proporcionalidad directa, inversa o sin proporcionalidad).

a) El recorrido en taxi se cobra a \$13.10 por el servicio más \$1.50 por cada 250 m.

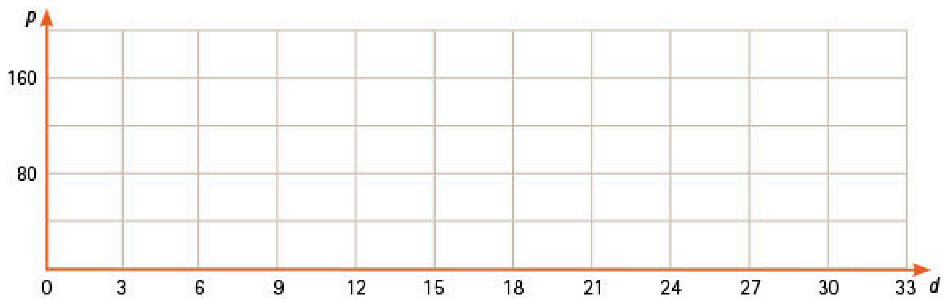
Kilómetros recorridos (d)	Precio del recorrido (p)
3	
6	
15	
30	

Expresión algebraica:

- $p = 6d$
- $p = 13.1 + 6d$
- $p = 6 + 13.1d$
- $p = \frac{6}{d}$

Tipo de relación: ____________________

DESCUBRO MÁS
De las expresiones algebraicas que no subrayaste, ¿alguna corresponde a una relación de proporcionalidad?



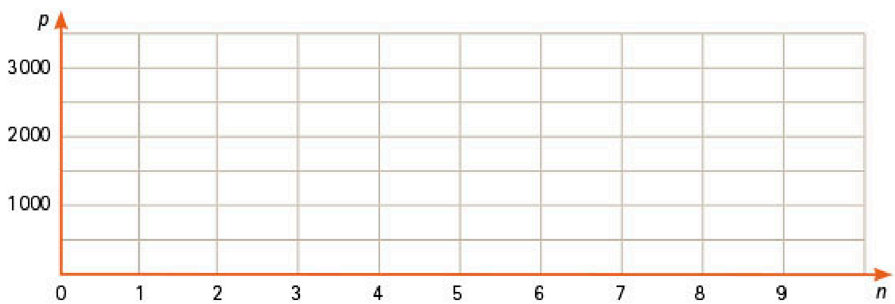
b) La renta de una casa cuesta \$6 000.00.

Si la pagan entre (n)...	Cada una paga (p)...
2 personas	
3 personas	
4 personas	
6 personas	

Expresión algebraica:

- $p = \frac{6000}{n}$
- $p = 6\,000n$
- $p = 6000 + n$
- $p = \frac{n}{6000}$

Tipo de relación: ____________________



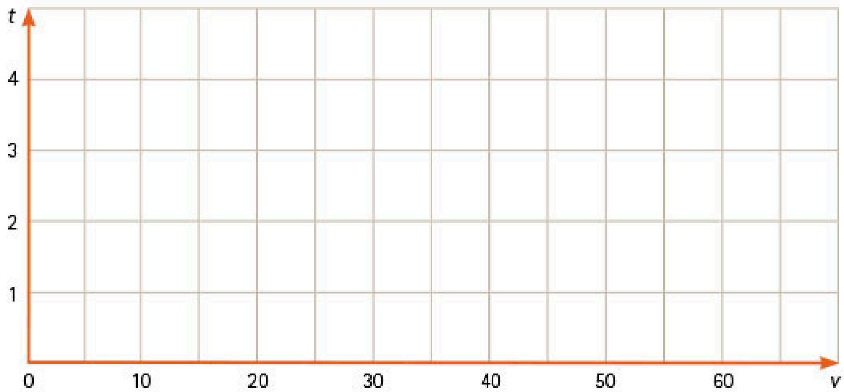
c) La escuela está a 20 km de la casa.

Velocidad promedio, *v*, en km/h	Duración del trayecto, *t*, en horas
5	
10	
20	
60	

Expresión algebraica:

- $t = \frac{v}{20}$
- $t = 20 + v$
- $t = 20v$
- $t = \frac{20}{v}$

Tipo de relación: ______________________



recíproco de un número: aquel que multiplicado por el número original da como resultado 1. Por ejemplo, el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$, pues $5 \times \frac{1}{5} = 1$.

MÁS IDEAS

Al hacer la gráfica, escoge una escala adecuada de los ejes, para poder ubicar con facilidad y precisión números menores que 1.

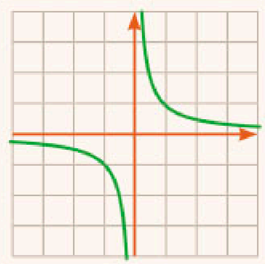
2. Considera la relación que a cada número le hace corresponder su **recíproco**: y = recíproco de x.

   a) Calcula los valores que faltan en la tabla. Después, haz la gráfica correspondiente en una hoja de papel cuadriculado o milimétrico.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y = recíproco de x	$-\frac{1}{2}$								1	

MÁS IDEAS

Tu gráfica debe tener más o menos esta forma:



   b) Considera que y es el recíproco de x. Indica, subrayándolas, cuáles de las siguientes igualdades son correctas.

- $y = 1x$
- $xy = 1$
- $y = \frac{1}{x}$
- $y = \frac{x}{1}$

   c) Traza, en papel cuadriculado o milimétrico, la gráfica de la relación que a cada número le asocia su recíproco.

   d) ¿La relación que a cada número le asocia su recíproco es de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa o ninguna de las dos? Argumenta tu respuesta.

____

____

DESCUBRO MÁS

En la relación de la actividad 2, ¿qué sucede con los valores de la variable y, cuando x es negativa y se acerca a 0? ¿Y cuando x es positiva y se acerca a 0? ¿Qué pasa cuando $x = 0$?

SECUENCIA 5

Expresiones equivalentes de sucesiones I

Lección 13. Expresiones diferentes, pero equivalentes

Aprendizaje esperado: verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

1. Trabaja con un compañero. En cada sucesión, los cuadrados o rectángulos representan mesas, y las sillas se ponen alrededor como se muestra. Completen las tablas y dibujen, en su cuaderno, la cuarta figura de cada sucesión.

Adaptado de David Carraher, Mara Martínez, Analúca Schliemann, "Early algebra and mathematical generalization" en *ZDM Mathematics Education*, vol. 40, enero de 2008, pp. 3-22.

Sucesión A

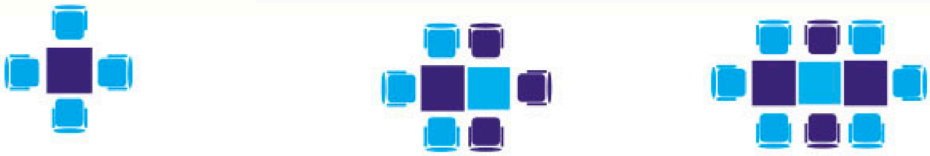


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Número de mesas	1	2	3	20	100	n
Número de sillas						

TIC MÁS Abre un archivo de hoja de cálculo e investiga cómo usar la herramienta para generar sucesiones a partir de la regla general.

Sucesión B

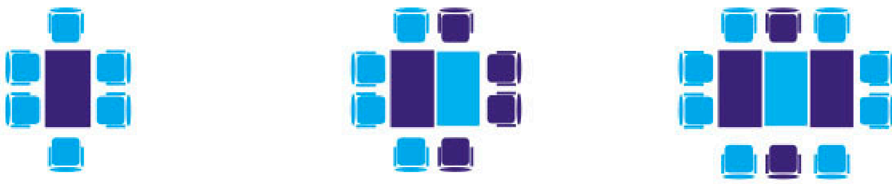


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Número de mesas	1	2	3	20	100	n
Número de sillas						

Sucesión C

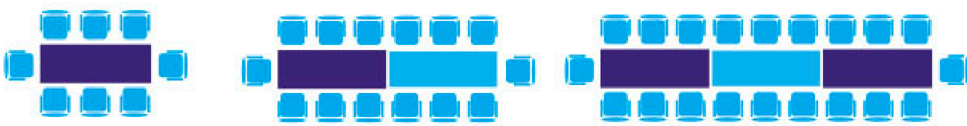


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Número de mesas	1	2	3	20	100	n
Número de sillas						

Validen sus respuestas con otra pareja de compañeros. Si para n mesas obtuvieron expresiones diferentes, verifiquen si son equivalentes.

expresiones algebraicas equivalentes: aquellas que siempre valen lo mismo al asignar valores a las variables. Por ejemplo, $2n + 2$ es equivalente a $2(n + 1)$, pues para cualquier valor de n ambas expresiones valen lo mismo: si $n = 4$, $2(4) + 2 = 2(4 + 1)$; si $n = 6$, $2(6) + 2 = 2(6 + 1)$...

2. Trabaja con un compañero. Consideren las sucesiones de la actividad anterior.

Si n representa el número de mesas, subrayen las expresiones que sirven para calcular el número de sillas de la sucesión A.

- $2n + 2$
- $2(n - 4) + 2$
- $2(n - 2) + 6$
- $4n - 2(n - 1)$
- $2(n + 1)$

3. Verifiquen su respuesta de la actividad anterior haciendo lo que se indica.

a) Completen la tabla. Sustituyan n por el número de mesas (1, 2, 3 o 4) y hagan los cálculos correspondientes para verificar qué expresiones arrojan los mismos resultados. La primera fila está resuelta.

Número de mesas (n)	1	2	3	4
$2n + 2$	$2(1) + 2 = 4$	$2(2) + 2 = 6$	$2(3) + 2 = 8$	$2(4) + 2 = 10$
$2(n - 4) + 2$				
$2(n - 2) + 6$				
$4n - 2(n - 1)$				
$2(n + 1)$				

b) ¿Qué expresiones de la tabla producen los mismos resultados?

____

c) Resuelvan las expresiones con paréntesis para verificar cuáles son equivalentes. El primer caso ya está resuelto.

- $2(n - 4) + 2 = 2n - 8 + 2 = 2n - 6$
- $2(n - 2) + 6 =$ ____________________
- $4n - 2(n - 1) =$ ____________________
- $2(n + 1) =$ ____________________

Validen, con ayuda del profesor, sus respuestas. Comenten lo siguiente respecto a la actividad 3.

- ¿Lo que hicieron en el inciso a) garantiza que las expresiones son equivalentes?, es decir, ¿sustituir n por 1, 2, 3 y 4 es suficiente para verificar que las expresiones son equivalentes?
- ¿Lo que hicieron en el c) garantiza que las expresiones son equivalentes?

4. Trabaja en tu cuaderno. Plantea, para cada una de las sucesiones B y C, dos expresiones diferentes pero equivalentes para calcular el número de sillas si hay n mesas.

Lección 14. Sucesiones numéricas

1. Trabaja con un compañero. Analicen la sucesión de números y hagan lo que se indica.

4, 7, 10, 13, 16, …

a) Subrayen la regla general de la sucesión anterior.

- $-3n + 1$
- $3n - 1$
- $3n + 1$
- $-3n - 1$

b) ¿Cómo identificaron la regla? ______________________________

____

regla general de una sucesión: expresión para representar o calcular el número que está en el lugar n de la sucesión; por ejemplo, para la sucesión de los números impares (1, 3, 5, 7, 9, ...), la regla general es $2n - 1$, pues $2(1) - 1 = 1$, $2(2) - 1 = 3$, $2(3) - 1 = 5$...

MÁS IDEAS
Las dos expresiones que subrayaron son equivalentes y, por eso, ambas funcionan como reglas generales de la sucesión (valen lo mismo al asignar valores a la variable n).

2. Consideren ahora la siguiente sucesión.

5, 11, 17, 23, 29, …

a) Subrayen las dos reglas que corresponden a la sucesión.

- $4n + 1$
- $2(3n - 1) + 1$
- $6n - 1$
- $2(3n + 1) - 1$

b) Expliquen, para las dos reglas que subrayaron, cómo puede obtenerse una a partir de la otra.

Comparen sus respuestas con las de otra pareja de compañeros. Comenten la información del recuadro.

Una forma de determinar la equivalencia de expresiones algebraicas es verificar si al hacer las operaciones indicadas y simplificar se llega al mismo resultado; por ejemplo, de las tres expresiones siguientes...

- $4n - 8$,
- $4(n - 2)$,
- $2n + 2(n - 4)$,

todas son equivalentes, pues...

- $4(n - 2) = 4n - 8$
- $2n + 2(n - 4) = 2n + 2n - 8 = 4n - 8$

Es decir, las tres pueden expresarse como $4n - 8$.

Taller de matemáticas

1. Subraya las reglas generales que corresponden a la siguiente sucesión.

4, 6, 8, 10, 12, …

- $2(n + 1)$
- $n + n + 2$
- $3n - n + 2$
- $4(n + 1) - 2(n + 1)$
- $2(n - 1)$
- $2n + 2$

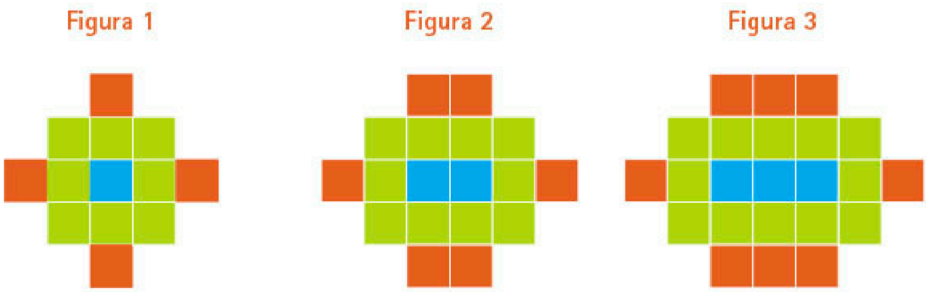
a) Verifica, en tu cuaderno, que las expresiones que subrayaste son equivalentes.

2. Une, mediante líneas, las expresiones que son equivalentes.

- $-5(x + 3)$ • $5x + 10$
- $-5(x + 1) + 3$ • $-4x + 2$
- $-5(-x - 2)$ • $-5x - 15$
- $-5x + (x + 2)$ • $x - 2$
- $-5 + (x + 3)$ • $-5x - 2$

3. En tu cuaderno, verifica que las reglas que uniste son equivalentes; escribe, para cada una, los primeros cinco términos de la sucesión que generan.

4. Considera la siguiente sucesión.



Anota una regla general para calcular el número de cuadrados…

a) azules: ____________ b) verdes: ____________

c) anaranjados: ____________ d) totales: ____________

5. Subraya las reglas generales que corresponden al número total de cuadrados en la sucesión anterior.

a) $5n + 8$ b) $5(n + 1) - 3$

c) $3(n + 2) + 2(n + 1)$ d) $n + 2n + 6 + 2n + 2$

DESCUBRO MÁS

Si dos reglas generan exactamente la misma sucesión, ¿por fuerza son expresiones equivalentes?

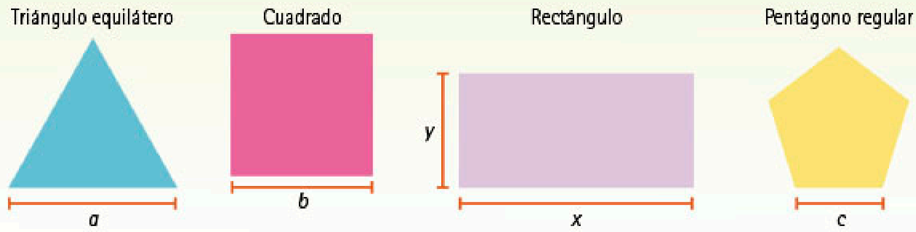
SECUENCIA 6

Expresiones equivalentes I

Lección 15. Fórmulas con igual valor numérico

Aprendizaje esperado: formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

1. Trabaja en equipo. Para cada figura, anoten dos expresiones algebraicas que denoten su perímetro.



	Primera expresión	Segunda expresión
Triángulo equilátero	$a + a + a$	
Cuadrado		
Rectángulo		
Pentágono regular		$5c$

2. Asignen, a las literales de la actividad 1, los valores que aparecen en la primera columna de la siguiente tabla. Verifiquen que, para cada figura, se obtiene el mismo perímetro con ambas expresiones.

	Primera expresión	Segunda expresión
Triángulo; $a = 3.5$	$3.5 + 3.5 + 3.5 = 10.5$	
Cuadrado; $b = \frac{7}{4}$		
Rectángulo; $x = 5.2$, $y = 3.4$		
Pentágono; $c = 5.8$		$5(5.8) = 29$

Revisen, en grupo y con ayuda del profesor, las expresiones que anotaron en la tabla de la actividad 1 y los resultados que obtuvieron en la tabla de la actividad 2. Después, comenten la siguiente información.

Las expresiones algebraicas que, aunque se escriban diferente, producen siempre el mismo valor numérico al asignar valores a las literales se llaman *expresiones equivalentes*. Por ejemplo, las expresiones $2(a + b)$, $2a + 2b$ son equivalentes, pues, como se muestra en la tabla, se obtiene el mismo valor en ambas al asignar valores numéricos a las literales.

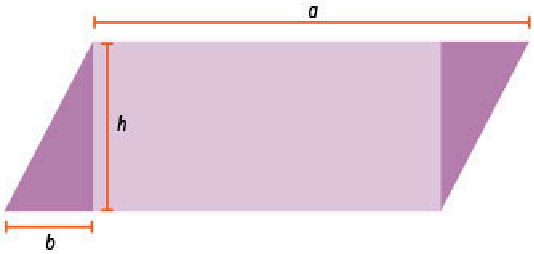
	$2(a + b)$	$2a + 2b$
$a = 1$; $b = 2$	$2(1 + 2) = 2(3) = 6$	$2(1) + 2(2) = 2 + 4 = 6$
$a = 3.4$; $b = 5$	$2(3.4 + 5) = 2(8.4) = 16.8$	$2(3.4) + 2(5) = 6.8 + 10 = 16.8$
$a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{2}{4}$	$2(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) = 2(\frac{3}{4}) = \frac{6}{4}$	$2(\frac{1}{4}) + 2(\frac{2}{4}) = \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4}$

DESCUBRO MÁS

Hay expresiones que parecen equivalentes, pero no lo son; por ejemplo, las expresiones $2x$, $x(x)$ toman el mismo valor para $x = 0$ o $x = 2$, pero no valen lo mismo si $x = 1$.

3. Entre las expresiones que se muestran, hay una que no corresponde al área total del romboide y, por tanto, no es equivalente a las demás. Identifícala y subráyala. Después, haz lo que se indica.

- $A_1 = ah$
- $A_2 = (a + b)h$
- $A_3 = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + (a - b)h$
- $A_4 = \frac{bh}{2} + (a + a - b)\frac{h}{2}$

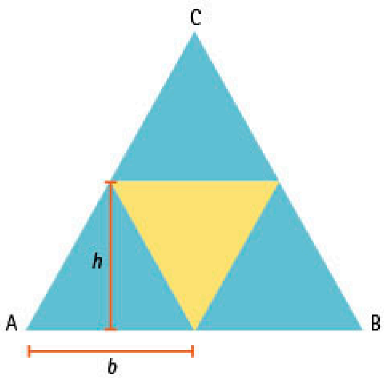


a) Considera los valores a = 12 cm, b = 3 cm, h = 5 cm y sustitúyelos en cada una de las fórmulas anteriores para verificar que en tres de ellas obtienes el mismo valor numérico y en una, no.

b) Relaciona, mediante líneas, cada fórmula con la descripción que le corresponde.

$A_1 = ah$ •	• Se calcula el área de cada triángulo y estas se suman con el área del rectángulo.
$A_2 = (a + b)h$ •	• Se calcula el área total del romboide.
$A_3 = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + (a - b)h$ •	• Se calcula el área de un triángulo y esta se suma con el área del trapecio, formado por el rectángulo y el otro triángulo.
$A_4 = \frac{bh}{2} + (a + a - b)\frac{h}{2}$ •	• Esta fórmula no corresponde al área del romboide.

4. Anota dos expresiones algebraicas equivalentes que denoten el área total del triángulo equilátero ABC.



Expresión 1: ______________________________

Expresión 2: ______________________________

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Asignen valores a las literales para verificar qué expresiones son equivalentes.

MÁS IDEAS

Las expresiones A_1, A_2, A_3 y A_4 se refieren al área total del romboide; es decir, si todas fueran correctas, significaría que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$.

MÁS IDEAS

Si una figura está dividida en varias partes, su área total es la suma de las áreas de las partes.

DESCUBRO MÁS

Si b = 3 cm y h = 2.6 cm, ¿cuál es el área total del triángulo equilátero?

Lección 16. Se escriben diferente, pero son equivalentes

1. Trabaja en equipo. En la lección anterior verificaron que las fórmulas que aparecen abajo son equivalentes, pues al asignar valores a las literales, las tres fórmulas producen siempre el mismo valor numérico.

- $A_1 = ah$
- $A_3 = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + (a - b)h$
- $A_4 = \frac{bh}{2} + (a + a - b)\frac{h}{2}$

Comenten de qué otra manera se puede verificar que dos expresiones son equivalentes y anoten en su cuaderno la conclusión.

2. Al simplificar la fórmula A_3 se puede llegar a la fórmula A_1. Completen el proceso que se muestra en la tabla.

¿Qué tenemos?	¿Qué hacemos?	¿Qué obtenemos?
$A_3 = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + (a - b)h$	Sumamos $\frac{bh}{2} + \frac{bh}{2}$	$A_3 = bh + (a - b)h$
$A_3 = bh + (a - b)h$	Multiplicamos $(a - b)h$	
$A_3 = bh + ah - bh$		$A_3 = ah$

simplificar una expresión algebraica: efectuar las operaciones necesarias para reducirla a su mínima expresión.

3. Continúen el proceso para simplificar la fórmula A_4; después contesten.

$$A_4 = \frac{bh}{2}+(a + a - b)\frac{h}{2} = \frac{bh}{2}+(2a - b)\frac{h}{2} = \frac{bh}{2} + \frac{2ah}{2} - \_\_\_\_ = \frac{2ah}{2} = \_\_\_\_$$

a) ¿Por qué $\frac{2(ah)}{2} = ah$? ______________________________

____

b) ¿Por qué las fórmulas A_1 y A_4 son equivalentes? ______________________________

____

Comparen sus respuestas con las de otro equipo; si no coinciden, averigüen quién tiene razón. Después, comenten la información del recuadro.

Otra manera de saber si dos expresiones algebraicas son equivalentes consiste en simplificar una de ellas para ver si se obtiene la otra. Por ejemplo, al simplificar la fórmula A_3, se obtiene A_1; lo que significa que ambas fórmulas son equivalentes.

4. En un grupo encontraron las siguientes expresiones para denotar el área total del triángulo equilátero de la lección anterior. Analícenlas y subrayen la fórmula que no es equivalente a las otras dos.

- $A_1 = \frac{4(bh)}{2}$
- $A_2 = 4(bh)$
- $A_3 = \frac{2b(2h)}{2}$

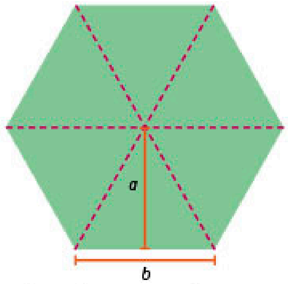
5. Trabaja en equipo. Expresen, de dos maneras diferentes, tanto el perímetro como el área del hexágono regular. Después contesten o hagan lo que se indica.

P_1 = ______________________

P_2 = ______________________

A_1 = ______________________

A_2 = ______________________



a) El hexágono está dividido en seis triángulos iguales; a y b representan, respectivamente, la altura y la base de uno de esos triángulos.

- ¿Cómo se representa algebraicamente el área de uno de esos triángulos? ____
- ¿Cómo calcularían el área del hexágono a partir del área del triángulo?

  ____

- Expresen algebraicamente el área del hexágono. ______________________

b) Otra expresión para calcular el área del hexágono es $A = \frac{Pa}{2}$, en la que P representa el perímetro y a, la apotema del hexágono, que a la vez es la altura del triángulo.

- Expliquen por qué, para cualquier hexágono regular, la igualdad $\left(\frac{ba}{2}\right)6 = \frac{Pa}{2}$ es verdadera. ______________________
- Consideren $b = 3$ cm, $a = 2.6$ cm y calculen el valor numérico de la igualdad anterior para que verifiquen si es o no verdadera.

Taller de matemáticas

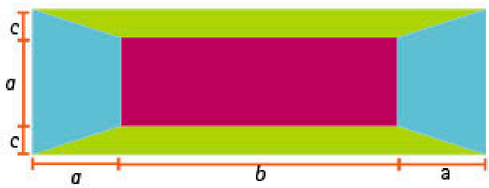
1. Expresa, algebraicamente, lo que se indica.

a) El perímetro del rectángulo interior:

____

b) El perímetro del rectángulo exterior:

____



c) El área del rectángulo interior: ______________________

d) El área de los trapecios verdes: ______________________

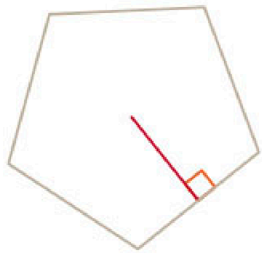
e) El área de los trapecios azules: ______________________

f) El área total de la figura: ______________________

MÁS IDEAS
Las expresiones P_1 y P_2 se refieren al perímetro del hexágono; es decir, $P_1 = P_2$. De manera análoga, $A_1 = A_2$ (ambas expresiones se refieren al área del hexágono).

MÁS IDEAS
En la figura, la literal a representa la longitud de la apotema (o la altura del triángulo) y b, la longitud del lado del hexágono (o la base del triángulo).

apotema: perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados.



TIC MÁS Practica con expresiones equivalentes en www.redir.mx/SCMM2-043a.

SECUENCIA 7

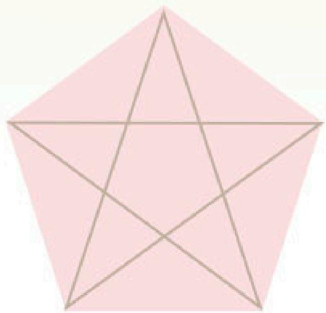
Construcción de polígonos I

Lección 17. Estrellas en polígonos

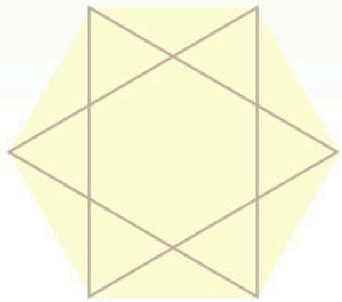
Aprendizaje esperado: deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

1. Trabaja en equipo. Determinen qué circunferencias de la siguiente página conviene usar para trazar las figuras A, B, C, D, E y F. Después, tracen las figuras en las circunferencias que eligieron. Usen solamente regla y lápiz para sus trazos.

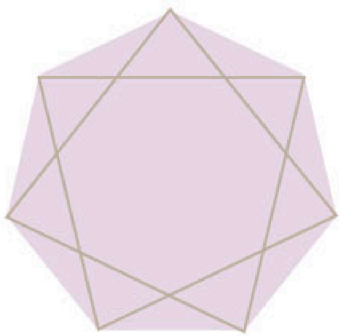
A



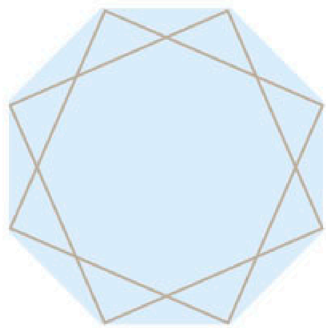
B



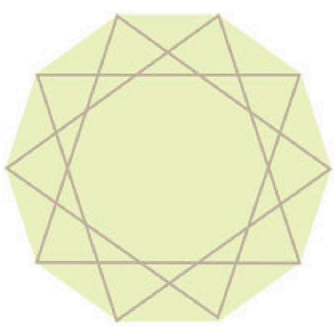
C



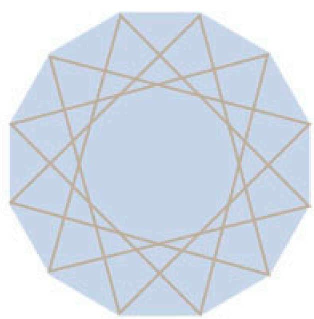
D



E

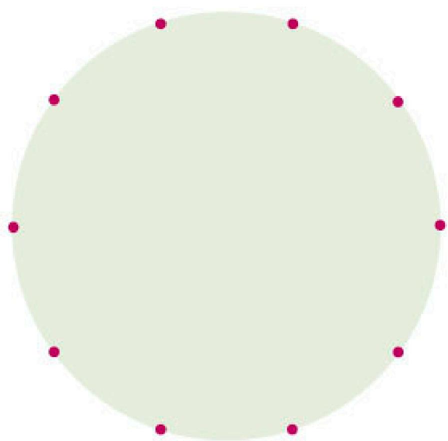
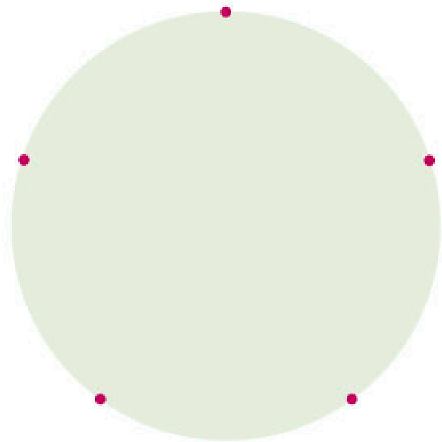
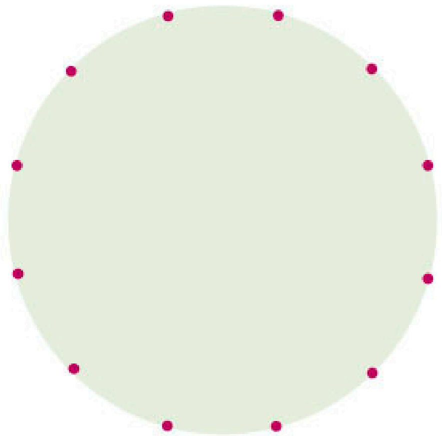
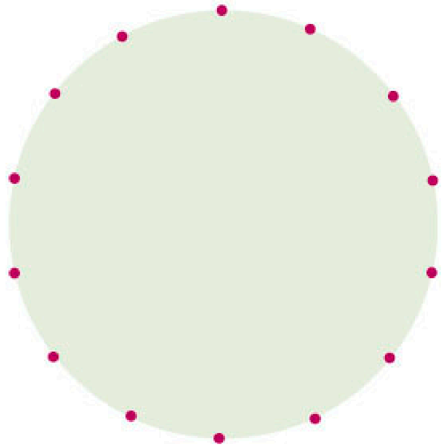
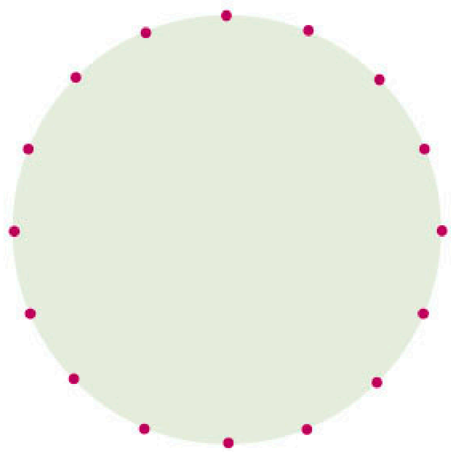
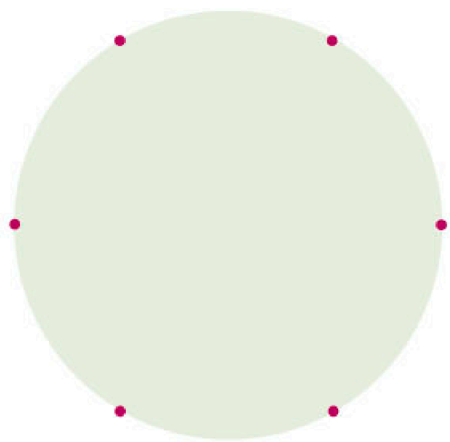


F



DESCUBRO MÁS

¿En qué figuras se forman triángulos equiláteros en las puntas de la estrella? ¿Cómo se relaciona el número de triángulos equiláteros con el número de lados del polígono?

DESCUBRO MÁS

¿Qué polígonos regulares pueden trazarse usando una circunferencia que tiene 60 puntos trazados sobre ella separados a igual distancia?

MÁS IDEAS

Los segmentos que trazaste dentro de cada polígono (que forman una estrella) son algunas de las diagonales del polígono. En la siguiente lección aprenderás qué caracteriza a las diagonales de un polígono.

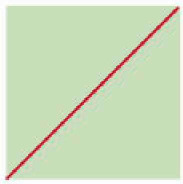
En grupo, comparen sus respuestas y expliquen cómo determinaron qué circunferencia les convenía usar en cada caso. Comenten también cómo se llama cada uno de los polígonos en donde están las estrellas.

Lección 18. ¿Qué es una diagonal?

1. Trabaja con un compañero. En cada polígono se ha trazado un segmento rojo; en algunos casos ese segmento es una diagonal del polígono, pero en otros no lo es. Analicen qué caracteriza a los segmentos que sí son diagonales. Después, hagan lo que se pide.

DESCUBRO MÁS
¿En qué figuras la diagonal trazada es también eje de simetría? ¿Hay ejes de simetría que no son diagonales?

Figura A

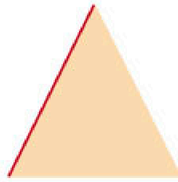


Sí es diagonal

Figura B

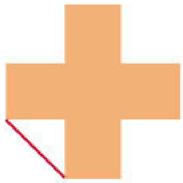
No es diagonal

Figura C



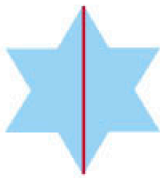
No es diagonal

Figura D



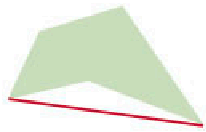
Sí es diagonal

Figura E



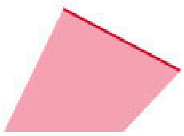
Sí es diagonal

Figura F



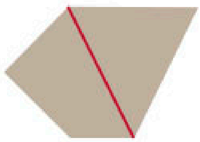
Sí es diagonal

Figura G



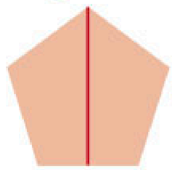
No es diagonal

Figura H



Sí es diagonal

Figura I



No es diagonal

a) Las siguientes afirmaciones son falsas. Elijan, de entre las figuras anteriores, aquellas que sean un contraejemplo de la veracidad de cada afirmación y anoten la letra de la figura correspondiente. La última fila ya está resuelta.

MÁS IDEAS
En la lección 6 aprendiste a qué se le llama *contraejemplo* en matemáticas.

Afirmación (falsa)	Figura(s) que funciona(n) como contraejemplo
Una diagonal siempre divide a un polígono en dos partes iguales.	
Todas las diagonales de un polígono están dentro de él.	
Una diagonal es un segmento que une dos vértices cualesquiera del polígono.	
Los segmentos que dividen al polígono en dos partes iguales son diagonales.	
Una diagonal de un polígono siempre es un segmento inclinado (no vertical ni horizontal).	E

2. Escribe, junto a cada figura, "SÍ" o "NO" para indicar si el segmento rojo es o no diagonal del polígono.

Figura J

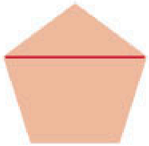


Figura K

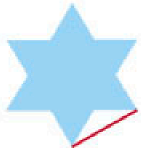


Figura L

Figura M

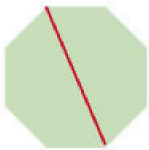


Figura N

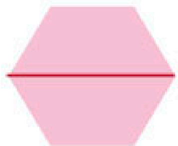


Figura O

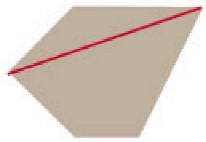


Figura P

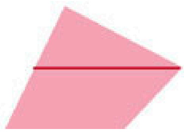


Figura Q

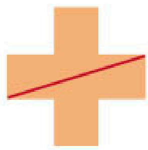


Figura R

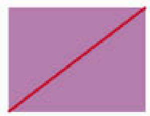


Figura S

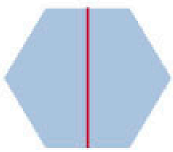


Figura T

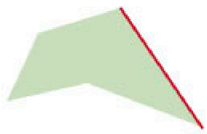


Figura U

Valida tus respuestas con tus compañeros. Comenten la definición del recuadro y verifiquen que los segmentos que eligieron como diagonales la cumplen.

Una *diagonal* es un segmento de recta que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

DESCUBRO MÁS
¿Cuál es el único polígono sin diagonales? ¿Por qué no las tiene?

3. Traza, en tu cuaderno, un cuadrilátero y un pentágono cualesquiera (pueden ser irregulares). Traza también todas las diagonales de cada polígono.

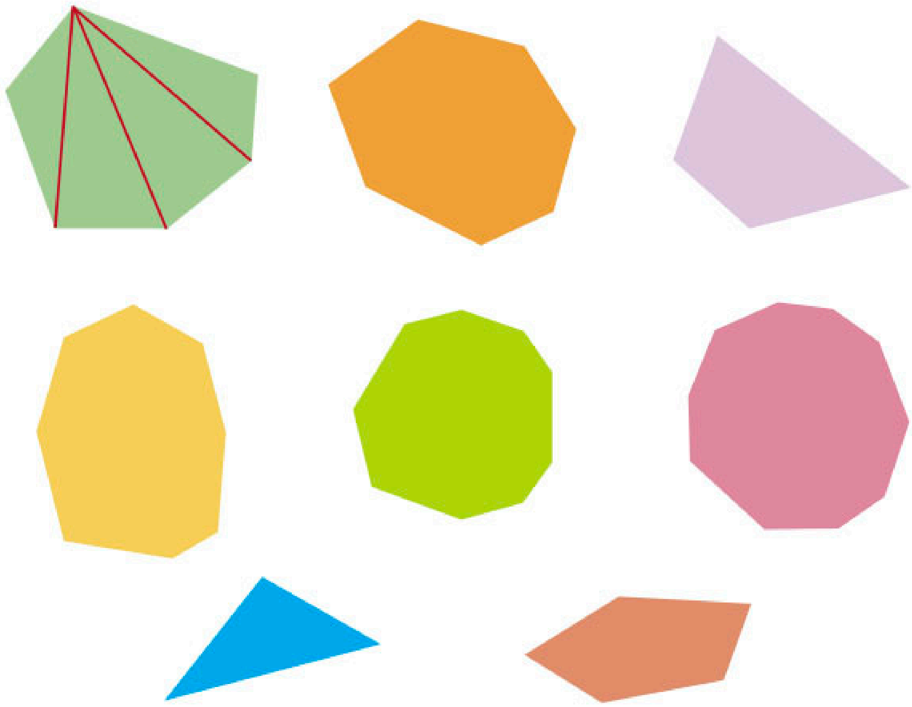
a) ¿Cuántas diagonales en total tiene el cuadrilátero que trazaste? ____________

b) ¿Y el pentágono? ________

Valida en grupo tus respuestas. Verifiquen que todos los cuadriláteros que trazaron tienen el mismo número de diagonales totales, y que lo mismo sucede para los pentágonos.

Lección 19. Diagonales desde un vértice

1. En el hexágono se eligió un vértice desde el que se trazaron, con rojo, las diagonales. Haz lo mismo con los otros polígonos.



2. Completa la tabla considerando los polígonos anteriores.

DESCUBRO MÁS
¿En qué cuadrilátero una diagonal lo divide en dos triángulos congruentes?

Polígono	Número de lados	Diagonales desde un vértice
triángulo	3	
cuadrilátero	4	
pentágono	5	
hexágono	6	3
heptágono	7	
octágono	8	
nonágono	9	
decágono	10	

3. Analiza los datos de la tabla anterior y encuentra la relación entre el número de lados del polígono y el número de diagonales desde un vértice.

a) ¿Cuál es esa relación? ____

____

b) Si n es el número de lados del polígono y d, el número de diagonales desde un vértice, escribe una expresión algebraica que relacione n y d: ______________

c) A partir de la definición de diagonal, argumenta por qué se da esta relación.

---

4. Trabaja en pareja. Tracen, para cada polígono de la actividad 1, todas las diagonales que salen desde todos los vértices.

a) Completen la tabla y analicen la relación entre el número de lados y el total de diagonales.

Número de lados del polígono	Diagonales desde un vértice	Total de diagonales
4		
5		
6	3	9
7		
8		
9		
10		
n		

b) ¿El total de diagonales se obtiene multiplicando las diagonales desde un vértice por el número de vértices del polígono? ____ Argumenten su respuesta.

Verifiquen los resultados con sus compañeros. En particular, comenten los argumentos que hacen válidas las expresiones algebraicas para el número de diagonales desde un vértice o el total de diagonales de un polígono de n lados. Lean y comenten la información del recuadro.

En un polígono de n lados, el número total de diagonales es $\frac{n(n-3)}{2}$.

Taller de matemáticas

1. Responde las preguntas.

a) ¿Cuántas diagonales es posible trazar desde un vértice en un polígono de 35 lados? ____

b) Desde un vértice de un polígono se pueden trazar un total de nueve diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono? ____

c) ¿Cuántas diagonales en total se pueden trazar en un polígono de 15 lados? ____

d) En un polígono se trazaron en total 14 diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono? ____

ME COMPROMETO

Si se me facilita comprender algún tema, apoyo a mis compañeros que lo requieren; si se me dificulta alguna actividad, pido ayuda a mis compañeros o al profesor.

DESCUBRO MÁS

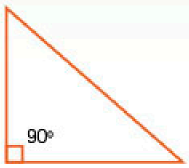
Explica el error del siguiente argumento.
En cualquier pentágono se pueden trazar dos diagonales desde cualquier vértice, y como la figura tiene cinco vértices, entonces cualquier pentágono tiene en total 2 × 5 = 10 diagonales.

Perímetro y área I

Lección 20. Triangulación de polígonos irregulares

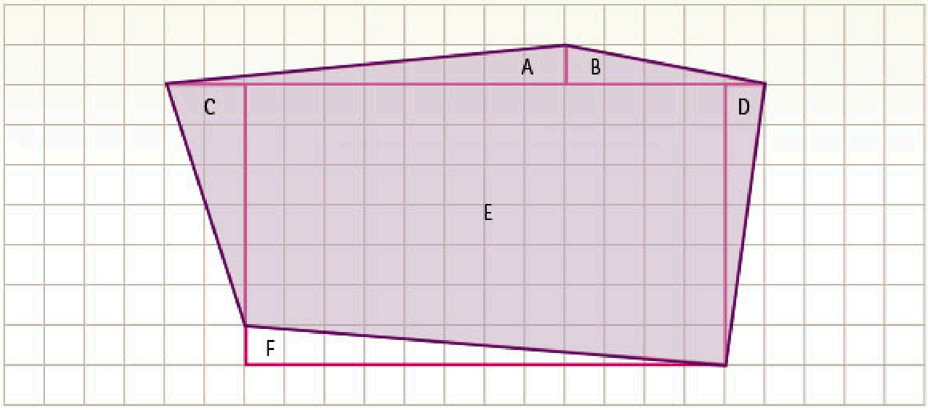
Aprendizaje esperado: calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

triángulo rectángulo: el que tiene un ángulo recto (de 90°).



1. Trabaja en equipo. Analicen la información y hagan lo que se pide.

La figura sombreada es el croquis de un terreno. Para conocer su área, se ha trazado un rectángulo y varios triángulos rectángulos.



a) Consideren como unidad de área la superficie de un cuadrito de la retícula. Anoten el área de cada región.

Triángulo A: ____________________ Triángulo B: ____________________

Triángulo C: ____________________ Triángulo D: ____________________

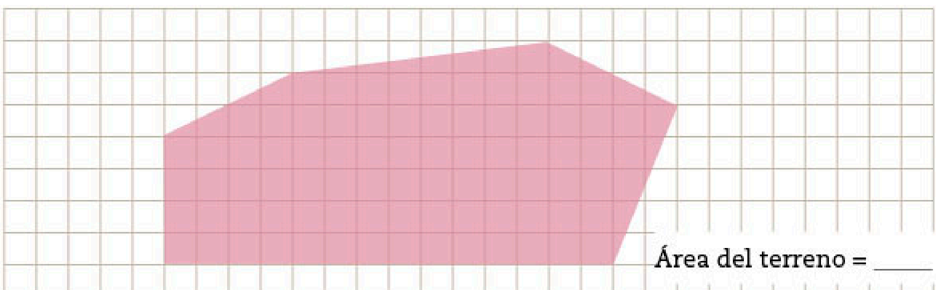
Rectángulo E: ____________________ Triángulo F: ____________________

b) Expliquen por qué el área del triángulo F debe restarse en vez de sumarse.

____

c) ¿Cuál es el área del terreno completo? ____________________

2. Este es el croquis de otro terreno. Hagan las particiones que consideren necesarias para calcular su área.



Área del terreno = _____

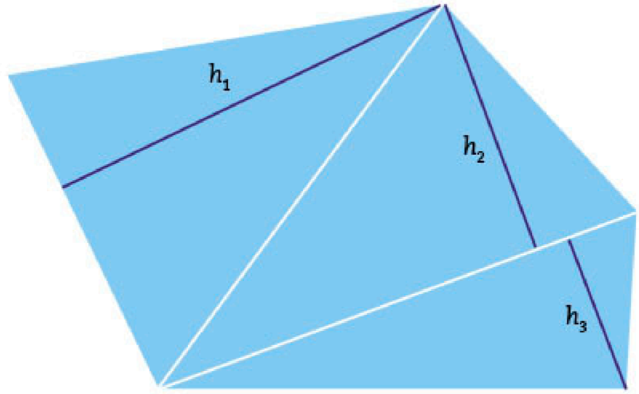
Validen, con el resto del grupo, sus resultados. Comenten cómo dividieron el croquis y revisen si las áreas de las partes son correctas.

DESCUBRO MÁS

Si en vez de partir el croquis, lo encierras en un rectángulo y restas las áreas que no corresponden a la figura, ¿llegarías al mismo resultado? Inténtalo.

3. Analiza la información y responde o haz lo que se indica.

Esta vez el croquis se trazó sobre papel sin cuadrícula. Para calcular su área, se dividió en tres triángulos y en cada uno se trazó una altura (h_1, h_2 y h_3).



a) Toma las medidas necesarias y calcula el área de cada triángulo.

A_1 = ______________

A_2 = ______________

A_3 = ______________

b) ¿Cuál es el área de la figura? ________________________________

c) Considera que el croquis anterior está a escala 1 a 100; es decir, cada centímetro de la figura corresponde a un metro del terreno real. Calcula el área real del terreno.

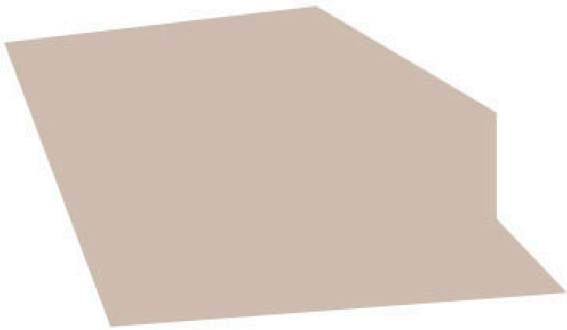
Área del terreno: ________________________________

DESCUBRO MÁS

A simple vista, ¿cuál de las tres áreas estimas que es mayor?

4. De nuevo, la escala es 1 a 100. Haz lo necesario para calcular el área real del terreno.

Área del terreno: ________________________________



Valida, en grupo, los resultados obtenidos. Comenten cómo dividieron el polígono y cómo calcularon el área de las partes. Si los resultados son muy diferentes, averigüen a qué se debe. Después, comenten la siguiente información.

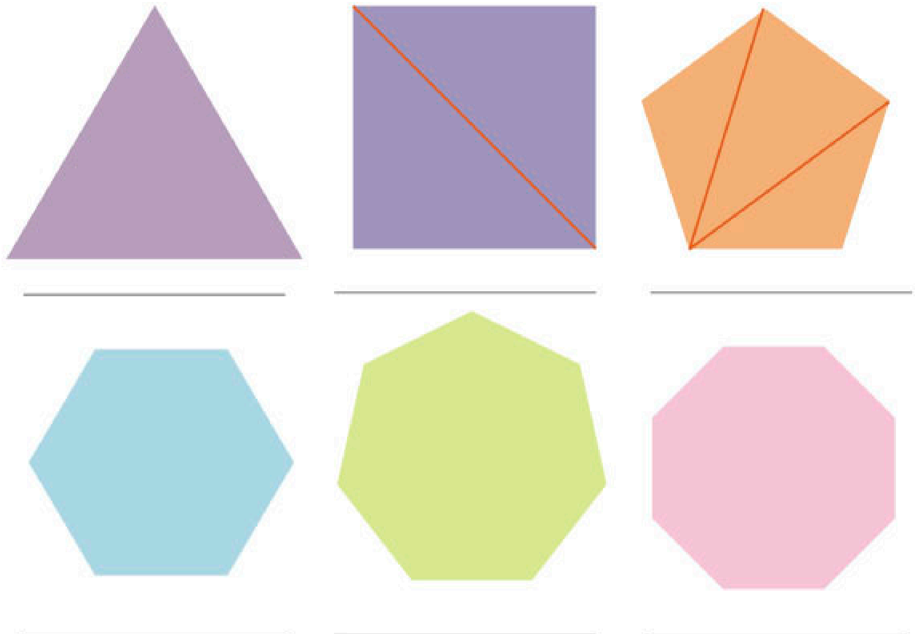
Una manera para calcular el área de figuras irregulares, como las de esta lección, es dividirlas en triángulos. Esta técnica se conoce como *triangulación de superficies*.

Para calcular el área de un triángulo se requieren las medidas de una de sus bases y de la altura correspondiente (la altura debe ser perpendicular a la base).

Lección 21. Triangulación de polígonos regulares

1. Trabaja en equipo. Analicen la información y hagan lo que se indica.

Las figuras mostradas son polígonos regulares; en algunos se trazaron diagonales para dividirlos en triángulos.



a) Tracen diagonales desde uno de sus vértices en los polígonos que no tienen.

b) Tracen las alturas necesarias para calcular el área de cada polígono.

c) El pentágono regular quedó dividido en tres triángulos, dos de ellos congruentes. ¿Por qué se puede asegurar que tienen la misma forma y tamaño?

____

____

____

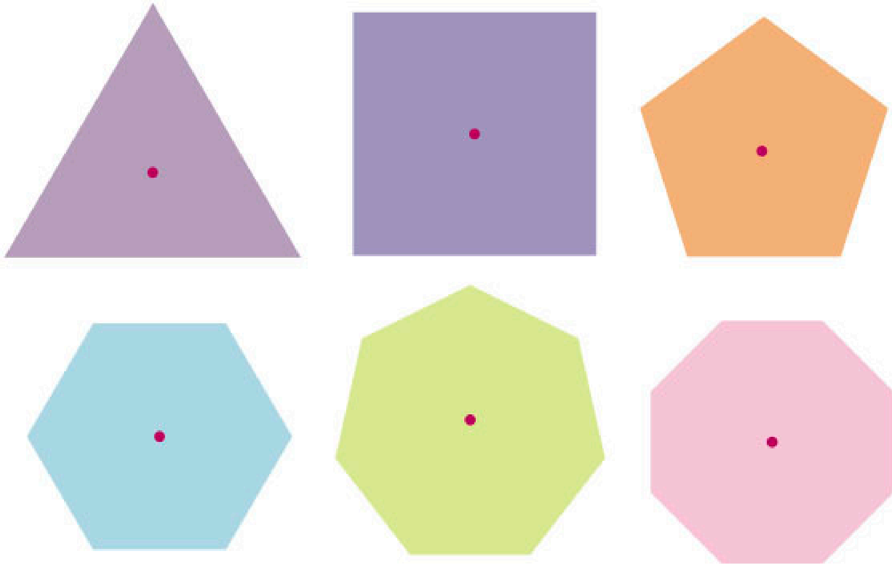
d) ¿Cuál es el área de cada triángulo congruente en el pentágono regular? ____________ ¿Y del que no es congruente? ____________

e) Anoten debajo de cada polígono regular su área en cm^2.

MÁS IDEAS
Un polígono se puede dividir en tantos triángulos como lados tiene la figura, menos dos.

Valida tus respuestas con tus compañeros. Usen las siguientes preguntas como guía.
- ¿Obtuvieron los mismos triángulos en cada polígono?
- ¿Obtuvieron triángulos congruentes?
- ¿Las alturas de sus triángulos están bien trazadas?
- ¿Alguno de los polígonos puede partirse en otras figuras conocidas para calcular su área?

2. Consideren los mismos polígonos regulares de la página anterior, cada uno con su centro marcado. Hagan lo que se indica.



DESCUBRO MÁS
¿Cómo localizarías el centro del polígono si no estuviera marcado?

a) Dividan cada polígono regular en triángulos que tengan como vértice común el centro del polígono.

b) ¿Cuántos triángulos hay en el cuadrado? _______ ¿Y en el heptágono? _______

c) ¿Cuántos triángulos habría en un polígono regular de *n* lados si se dividiera de la misma manera? ______________________________

d) En cada polígono, tracen una altura a uno de los triángulos, tomen las medidas necesarias y calculen su área. Después, completen la información de la siguiente tabla.

Polígono regular	Medidas de un triángulo		Área de un triángulo	Área del polígono
	Base	Altura		
Triángulo				
Cuadrado				
Pentágono				
Hexágono				
Heptágono				
Octágono				

e) Comparen las áreas de la última columna de la tabla con las que anotaron en la página anterior en cada polígono. Si no coinciden, corrijan lo necesario.

Con sus compañeros y su maestro, comparen esta manera de triangular los polígonos regulares con el método de la página anterior. Comenten cuál les parece mejor y por qué.

Lección 22. Una fórmula para el área de polígonos regulares

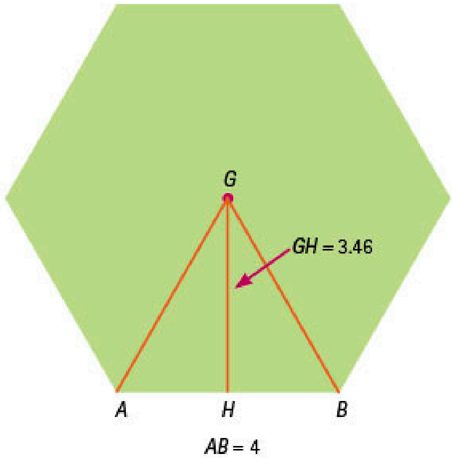
1. Trabaja en equipo. La figura es un hexágono regular y el punto G es el centro del polígono. Calculen lo que se pide.

MÁS IDEAS
En la lección 16 aprendiste a calcular el área de un hexágono regular dividido en triángulos.

Perímetro del hexágono = ______

Área del triángulo ABG = ______

Área del hexágono = ______



a) Describan un procedimiento para calcular el área del hexágono a partir de la del triángulo ABG.

____

____

____

____

b) Expresen, con una fórmula, el procedimiento que describieron en el inciso anterior para calcular el área del hexágono. ______________________

c) ¿Cómo se expresaría la fórmula si se tratara de un polígono regular de 10 lados? ______________________

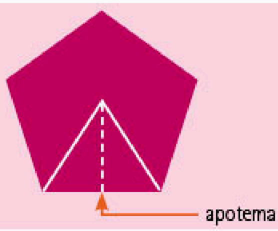
d) ¿Y si se tratara de un polígono regular de *n* lados? ______________________

ME COMPROMETO
Al validar respuestas, acepto propuestas diferentes a la mía y entiendo que casi siempre hay más de un método que lleva a la solución correcta.

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Comenten si coinciden las fórmulas que escribieron o si son equivalentes. Después, analicen la información del recuadro.

DESCUBRO MÁS
¿Es cierta o falsa la siguiente igualdad?
$\left(\frac{bh}{2}\right) 10 = (bh)5$

La fórmula más conocida para el área de un polígono regular es *área igual a perímetro por apotema entre dos*: $A = \frac{Pa}{2}$. La apotema tiene la misma medida que la altura de uno de los triángulos en que se divide el polígono.

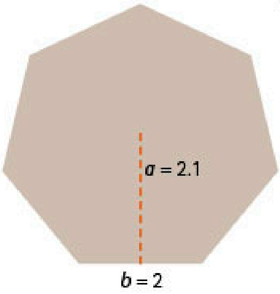


2. Trabaja con un compañero. Respondan o hagan lo que se pide.

a) Calculen el área del polígono regular. Utilicen la fórmula que construyeron en la página anterior y la fórmula usual.

Fórmula usual:

$A = \frac{Pa}{2} =$



Fórmula construida:

b) Si no cometieron algún error, obtuvieron el mismo resultado con las dos fórmulas. Expliquen por qué.

____

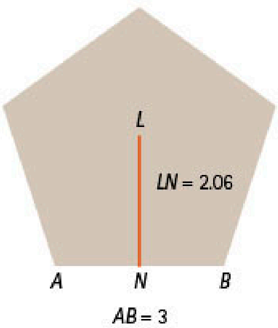
____

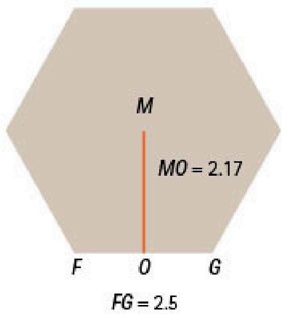
c) ¿Qué parte de la fórmula construida corresponde al perímetro del polígono?

____

d) ¿Cuánto mide el perímetro del polígono? ____________________

3. Consideren la información que hay en los polígonos regulares y contesten.





a) ¿Cuál tiene mayor perímetro? ____________________

b) ¿Cuál piensan que tiene mayor área y por qué? ____________________

____

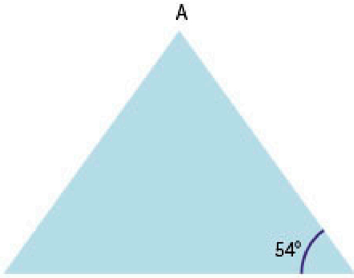
c) Calculen, en su cuaderno, ambas áreas para validar su respuesta anterior.

Validen, con el resto del grupo, sus resultados. Den más ejemplos de polígonos regulares que tengan igual perímetro, pero diferente área.

DESCUBRO MÁS
Si dos polígonos tienen igual perímetro, ¿necesariamente tienen igual área? ¿Y si se trata de dos rectángulos? ¿Y para dos cuadrados?

Lección 23. Más sobre área de polígonos

1. La figura azul es uno de los cinco triángulos con los que se forma un pentágono regular; A es el vértice común de los cinco triángulos. Toma las medidas necesarias para responder.



a) ¿Cuál es el área del triángulo?

____

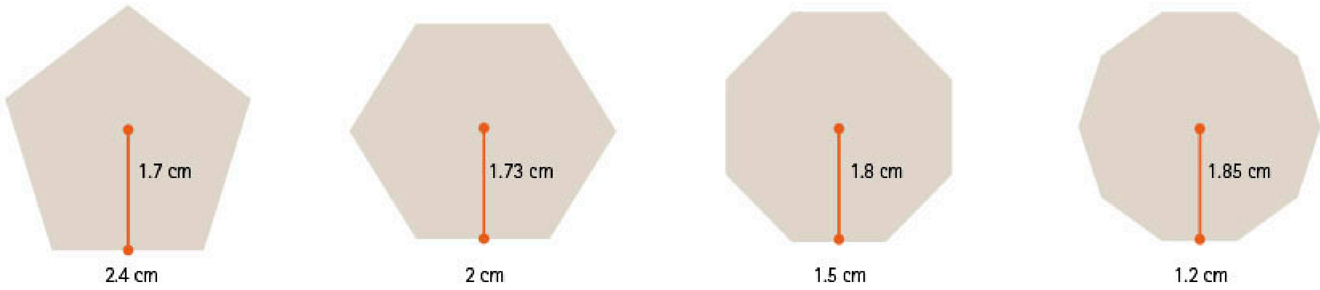
b) ¿Cuál es entonces el perímetro del pentágono? _______________

c) ¿Cuál es su área? _______________

2. Cada lado de un polígono regular mide 0.5 cm. Su área se expresa con la fórmula $A = 4a$, en donde A = área y a = apotema.

¿Cuántos lados tiene el polígono? _______________

3. Considera los siguientes polígonos regulares y contesta.



DESCUBRO MÁS

Imagina un polígono de 100 lados con igual perímetro que los del inciso b). ¿Cuánto mediría un lado? ¿Cuál sería el área de la figura?

a) ¿Cuál tiene mayor perímetro? _______________

b) ¿Cuál tiene mayor área? _______________

c) ¿Qué ocurre con el área a medida que aumenta el número de lados?

____

4. Considera varios polígonos regulares con distinto número de lados, pero con una característica en común: cada lado siempre mide 3 cm.

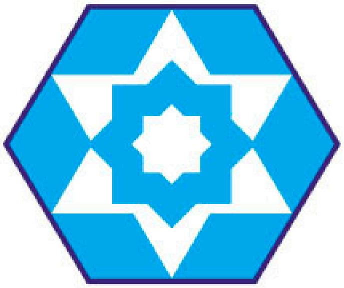
¿Qué ocurre con el área a medida que aumenta el número de lados?

____

Explica al resto del grupo tus respuestas de esta página. Comenten, para el caso de la actividad 3 (polígonos regulares de perímetro fijo), hasta dónde piensan que puede crecer el área o si puede crecer indefinidamente.

Taller de matemáticas

1. Se quiere cubrir una superficie rectangular de 5 m × 10 m con adoquines hexagonales de 15 cm de lado y 13 cm de apotema.



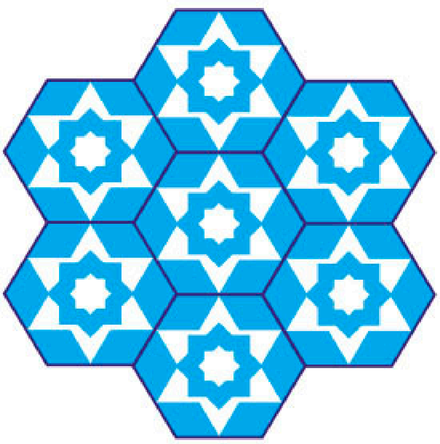
a) Dibuja un esquema que represente la situación planteada.

b) ¿Cuál es el área de cada loseta, en centímetros cuadrados?

c) ¿Cuánto mide la superficie rectangular, en centímetros cuadrados?

d) De acuerdo con lo anterior, ¿cuántas losetas se requieren como mínimo?

e) Calcula el área que ocupan siete losetas acomodadas en forma de flor.



SECUENCIA 9

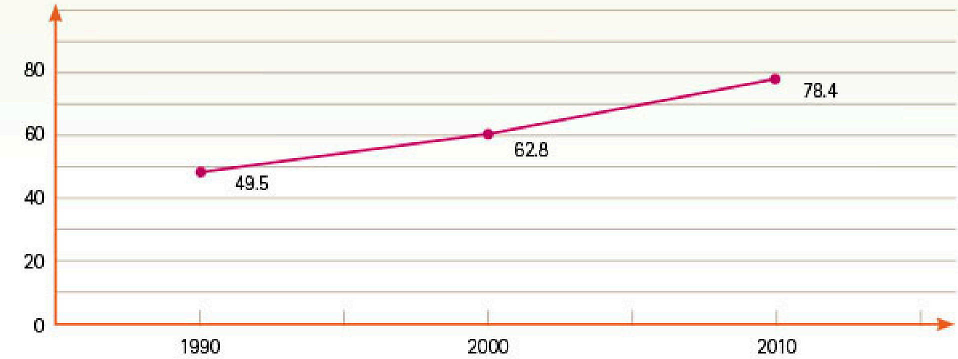
Gráficas de línea

Lección 24. Analfabetismo en México

Aprendizaje esperado: recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

1. Trabaja en pareja. Analicen las gráficas y respondan. Pueden usar calculadora.

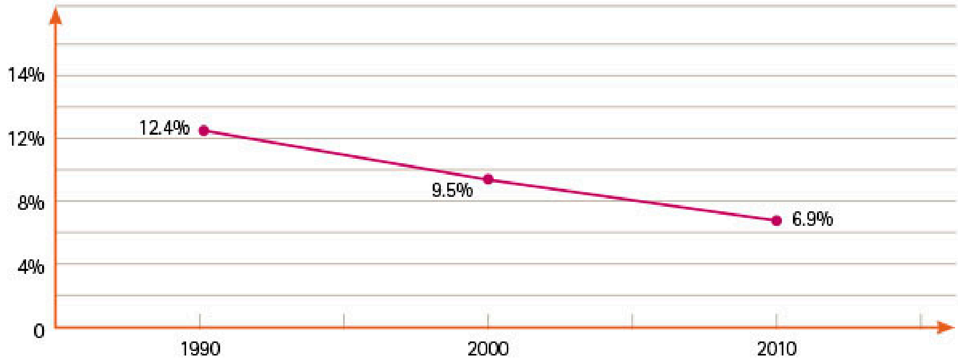
Población de 15 años o más en México de 1990 a 2010 (millones de habitantes)



Elaboración propia con datos de www.beta.inegi.org.mx/app/tabulados/pxweb.

¿Cuál estimas que es el porcentaje de analfabetismo entre la población adulta de tu comunidad?

Porcentaje de población analfabeta de 15 años o más en México de 1990 a 2010



Elaboración propia con datos de www.beta.inegi.org.mx/app/tabulados/pxweb

DESCUBRO MÁS
Si el porcentaje de analfabetismo baja durante cierto periodo de tiempo, ¿el total de analfabetos forzosamente disminuye?

a) ¿En cuántos millones aumentó la población de más de 15 años en la década de 1990 a 2000? ____________ ¿Y en la década de 2000 a 2010? ________________

b) ¿Cuántos analfabetos de 15 años o más había, aproximadamente, en 1990? ______________ ¿Y en 2010? ______________

c) ¿Consideran que en esos 20 años ha disminuido el problema del analfabetismo? ________________ Argumenten en el cuaderno su respuesta.

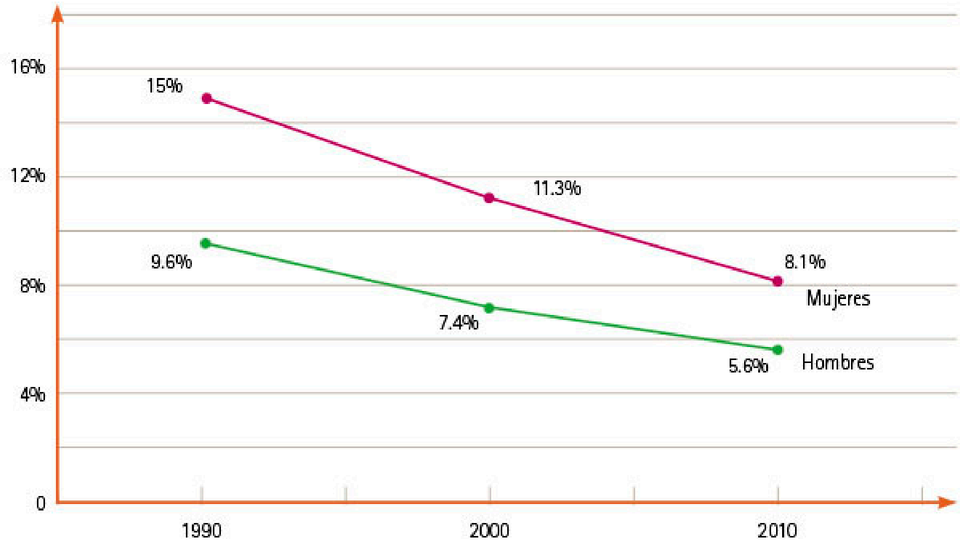
Comparen sus respuestas con las del resto del grupo y expliquen cómo las obtuvieron. Comenten la información del recuadro.

Las gráficas anteriores se llaman *gráficas de línea*. Su principal característica es que presentan datos numéricos (cantidades brutas, porcentajes, razones, etc.) que varían a través del tiempo (años, meses, días, etc.).

Otra característica de este tipo de gráfica es que no es necesario iniciar en el tiempo cero, sino a partir del intervalo que se desea mostrar.

2. Trabaja con un compañero. Analicen la gráfica de línea y respondan. Pueden usar calculadora.

Porcentaje de población analfabeta de 15 años o más por género



Elaboración propia con datos de www.beta.inegi.org.mx/app/tabulados/pxweb.

a) ¿En qué año fue mayor la diferencia de porcentaje de analfabetismo entre mujeres y hombres? _______________

b) Si en 2010 había 40.8 millones de mujeres y 37.7 millones de hombres de 15 años y más, ¿cuántas mujeres analfabetas había aproximadamente? _______________ ¿Y cuántos hombres? _______________

c) ¿Cuál piensas que es la razón de que el analfabetismo en mujeres sea mayor que en hombres? ____

____

____

d) La diferencia entre la cantidad de hombres y mujeres analfabetos, ¿se mantiene invariante, tiende a reducirse o tiende a aumentar? _______________

En grupo, comparen sus respuestas y opiniones. Anoten, en su cuaderno, medidas que se pueden tomar para erradicar el analfabetismo en México y para promover la equidad de género.

TIC MÁS Investiga en internet qué porcentaje de analfabetismo ha tenido tu localidad durante los últimos años. Utiliza la información recabada para hacer una gráfica de línea como las de esta lección.

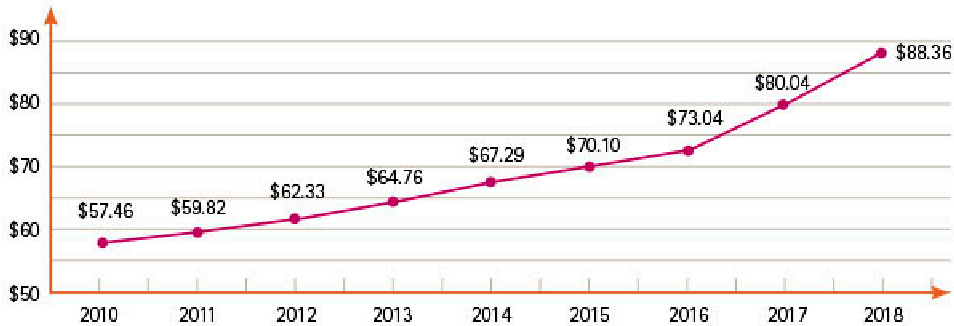
ME COMPROMETO

Al investigar en internet, siempre busco en más de una fuente y sintetizo la información encontrada (no me limito a copiar y pegar).

Lección 25. Más sobre gráficas de línea

1. Trabaja en pareja. Analicen la información y respondan.

Salario mínimo diario en México (de 2010 a 2018)



Salario mínimo diario en México (de 2010 a 2018)

Estas dos gráficas de línea tienen la misma información, pero presentada de manera diferente: en una de ellas parece que el salario mínimo ha tenido buen crecimiento durante los últimos años (los segmentos de recta tienen mayor inclinación); mientras que la otra da la impresión de que el aumento en el salario mínimo ha sido poco en años recientes (los segmentos son menos inclinados).

¿A qué se debe que las gráficas transmitan ideas diferentes a pesar de tener la misma información? ______________________________

____

Comparen su respuesta con las del grupo. Acuerden una conclusión común y anótenla en su cuaderno. Después, comenten la información del recuadro.

La elección de la escala vertical debe elegirse de manera adecuada; por ejemplo, para mostrar solamente los datos que interesan al receptor de la gráfica o para que no haya demasiado espacio vacío en la gráfica.

DESCUBRO MÁS

¿Cómo elegirías la escala del eje vertical en la actividad 1 para que parezca que el salario mínimo casi no ha crecido en los últimos años (que los segmentos sean casi horizontales)?
¿Qué opinas de quienes escogen de manera "tramposa" la graduación de los ejes para dar una impresión falsa de los datos en una gráfica?

2. Analiza la información y responde.

En enero de 2010, la gasolina Magna costaba $7.88 y en enero de 2017, $15.99.

a) ¿Aumentaron en la misma proporción el precio de la gasolina y el salario mínimo de 2010 a 2017? ______

b) Argumenta tu respuesta. ______

______

DESCUBRO MÁS

¿En qué porcentaje aumentó el precio de la gasolina de 2010 a 2017? ¿En qué porcentaje aumentó el salario mínimo en ese periodo?

3. Reúnete con dos o tres compañeros para trabajar en equipo. Hagan lo que se indica.

a) Investiguen datos numéricos que varíen respecto al tiempo de algún tema que sea de su interés o que consideren relevante, por ejemplo:

- peso promedio de un bebé durante sus primeros meses de vida;
- cantidad de goles anotados por un futbolista durante los últimos años;
- promedio de temperatura ambiental en su localidad para las cuatro temporadas del año;
- cotización del euro a lo largo del mes;
- población mundial durante las últimas décadas;
- medallas ganadas por un país en las últimas ediciones de las Olimpiadas;
- ...

b) Con los datos que investiguen, elaboren en su cuaderno una gráfica de línea y redacten un texto que resuma lo mostrado en la gráfica.

c) Presenten al grupo los resultados de su investigación.

Taller de matemáticas

1. La tabla muestra el pronóstico de temperatura en una ciudad para diferentes horas del día.

Hora	2:00	5:00	8:00	11:00	14:00	17:00	20:00	23:00
Temperatura	14°	12°	15°	25°	30°	29°	21°	16°

a) Elabora una gráfica de línea con los datos de la tabla.

b) Redacta, en tu cuaderno, un texto que resuma lo mostrado en tu gráfica.

TIC MÁS

Investiga cómo hacer gráficas de línea en una hoja de cálculo. Usa la herramienta para crear una gráfica de línea sobre algún tema de tu interés y preséntala al resto del grupo.

SECUENCIA 10

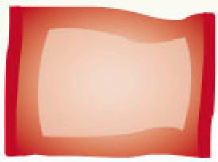
Azar y probabilidad I

Lección 26. ¿Qué bolsa conviene elegir?

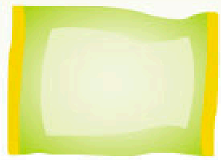
Aprendizaje esperado: determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

1. Resuelve los problemas con un compañero.

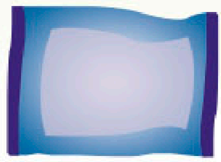
a) En un juego de mesa hay tres bolsas opacas, A, B y C, que contienen en su interior distintas cantidades de canicas negras y blancas. Las canicas no se pueden ver, pero se sabe cuántas negras hay en cada bolsa.



Bolsa A: 3 negras y ¿blancas?



Bolsa B: 4 negras y ¿blancas?



Bolsa C: 6 negras y ¿blancas?

Juan debe escoger una bolsa para sacar de ella una canica, sin ver. Si sale negra, gana; pero si es blanca, pierde.

- ¿Qué bolsa le conviene elegir para sacar la canica? Argumenten su respuesta.

____

____

____

- Respondan nuevamente la pregunta anterior, pero ahora sabiendo que las bolsas A, B y C tienen 4, 6 y 12 canicas blancas, respectivamente.

____

____

b) En la tabla están anotadas las cantidades de canicas en otras bolsas. Completen los datos que faltan.

Bolsa	Canicas negras	Canicas blancas	Canicas totales	Razón de canicas negras respecto al total
A	3	4	7	$\frac{3}{7}$
B	4	6	10	
C	6	12	18	
D			20	$\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$
E			10	$\frac{5}{5} = 1$
F			20	$\frac{3}{5}$

c) Ordenen las bolsas de la tabla anterior, de la que tiene menor probabilidad de sacar una canica negra (sexto lugar) a la que tiene mayor probabilidad (primer lugar).

Menos probable ← → **Más probable**

6° lugar	5° lugar	4° lugar	3er lugar	2° lugar	1er lugar
					Bolsa E

d) Ubiquen las razones de la tabla anterior en la recta. No necesitan ponerlas en el lugar exacto, solamente en el orden correcto y en el intervalo que les corresponde.

Validen, en grupo, sus respuestas. Comenten por qué en la primera pregunta del inciso a) es imposible saber qué bolsa conviene elegir para sacar una canica negra. Después, analicen la información del recuadro.

La razón "De 5 canicas, 3 son negras" está expresada con dos números, 5 y 3. También se puede expresar con una fracción: $\frac{3}{5}$ de las canicas son negras.

Las fracciones son muy útiles para expresar razones entre una parte y un todo, como las de la actividad anterior.

2. Resuelve los problemas. Considera que todas las bolsas tienen canicas negras y blancas.

a) En la bolsa G, $\frac{3}{4}$ del total de canicas son negras. ¿Cuántas canicas negras y cuántas blancas puede haber en la bolsa? Anota al menos dos soluciones.

____

b) En la bolsa H, 0.3 de las canicas son negras. ¿Cuántas canicas de cada color puede haber en la bolsa? _______________

c) En la bolsa I, 0.8 de las canicas son negras. Explica si se puede saber si es más probable o menos probable sacar una canica negra de esta bolsa que de la H.

____

____

____

Compara tus respuestas con las del grupo. Respondan juntos lo siguiente.

¿Cuál es la mayor razón de canicas negras respecto al total que puede haber en una bolsa? _______________ ¿Y la menor? _______________

DESCUBRO MÁS

El enunciado "$\frac{5}{4}$ de las canicas son negras" es incorrecto. ¿Por qué?

Lección 27. La escala de la probabilidad

1. Trabaja en equipo. Delante de cada enunciado pongan una ✔ en la columna que que les parezca acertada.

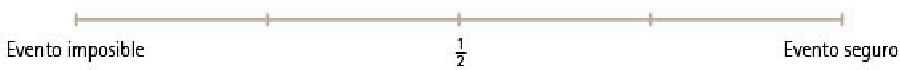
En el próximo campeonato mundial de futbol...	Seguro	Probable	Poco probable	Imposible
a) 30 equipos ganarán su primer partido.				
b) Brasil será campeón.				
c) algún equipo será campeón.				
d) México será campeón.				
e) el equipo campeón no recibirá ningún gol.				
f) el equipo campeón anotará más goles de los que reciba.				

Comparen sus respuestas de la tabla con las de los otros equipos. Den más ejemplos de eventos seguros, probables, poco probables o imposibles.

2. Analiza la información y haz lo que se pide.

DESCUBRO MÁS
¿Qué significa que el Servicio Meteorológico Nacional diga que la probabilidad de lluvia para hoy es de 80% ($\frac{4}{5}$)?

La probabilidad es *la medida de la certeza o duda de que un evento dado ocurra o no*. En la recta se muestra la escala de la *probabilidad*.



a) Con base en los enunciados de la actividad anterior, apoyándote de la escala de probabilidad, anota en la recta la letra (a, b, c, d, e o f) en el lugar que consideres que le corresponde.

b) ¿Qué fracción usarías para expresar la probabilidad de que caiga águila al echar un volado? ____________ Explica por qué: ______________________________

____

c) ¿Qué fracción usarías para expresar la probabilidad de que caiga un cinco al lanzar un dado de seis caras? ____________ Explica por qué: __________________

____

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten si las explicaciones que anotaron en los incisos b) y c) coinciden con la información del siguiente recuadro.

Como se mostró anteriormente, la escala de la probabilidad va de 0 a 1: un evento con probabilidad 0 es imposible que ocurra; si un evento tiene probabilidad 1, es seguro que ocurrirá.

La fracción $\frac{a}{b}$, con la que se puede expresar la probabilidad de un evento, es la razón entre eventos favorables y eventos posibles:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{total de resultados posibles}}$$

Por ejemplo:

- En el caso de un volado, el evento "Que caiga águila" tiene probabilidad $\frac{1}{2}$, pues hay un caso favorable (águila) de dos resultados posibles (águila, sol).
- En el caso del lanzamiento de un dado, el evento "Que caiga un número menor que 3" tiene probabilidad $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, pues hay dos casos favorables (1, 2) de seis resultados posibles (1, 2, 3, 4, 5, 6).

A esta manera de calcular la probabilidad se le llama *probabilidad teórica* o *clásica*.

3. Trabaja en equipo. Analicen cada experimento y respondan.

a) Se hace girar una ruleta como la que se muestra y, al detenerse, la flecha quedará sobre alguno de los sectores triangulares.

¿Cuál es la probabilidad teórica de que, al detenerse la ruleta, la flecha quede sobre…

- un sector azul? ___________
- un sector verde? ___________
- un sector negro? ___________
- un sector azul, verde o anaranjado? ___________

b) Se lanza un dado. ¿Cuál es la probabilidad teórica de que caiga…

- 3? ___________
- un número mayor que 4? ___________
- un número impar? ___________
- 8? ___________

Comparen sus resultados con los de otros equipos. Verifiquen que las fracciones que encontraron están dentro de la escala de la probabilidad.

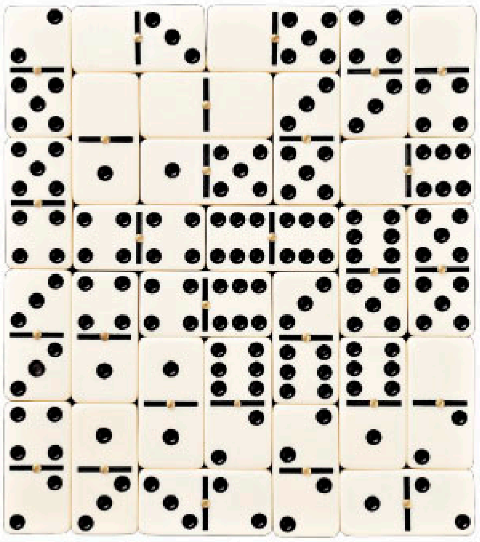
TIC MÁS Practica el cálculo de probabilidades en www.redir.mx/SCMM2-065a.

Lección 28. La probabilidad de que algo no ocurra

¿Qué juegos de mesa conoces en los que intervenga el azar?

1. Trabaja en equipo. Analicen la información y respondan.

La imagen muestra las 28 fichas que hay en el juego de dominó. Aquellas fichas que tienen igual cantidad de puntos en ambas mitades se denominan *mulas* (mula de unos, mula de seises...); las demás fichas se nombran a partir de los números en ambas mitades; por ejemplo, la ficha "blanca–uno" o la ficha "uno–seis".



a) Imaginen que las 28 fichas de dominó están revueltas y bocabajo (no se puede distinguir una de otra) y toman una ficha al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que...

- sea la 1-6? __________
- no sea la 1-6? __________
- en total tenga trece puntos? ____
- sea una mula? __________
- en total tenga cinco puntos? ________
- no sea una mula? __________

b) Expliquen por qué, al estar todas las fichas volteadas y revueltas, cada ficha tiene la misma probabilidad de salir que las otras.

____

____

____

c) ¿Cuál es la probabilidad de salir de cada ficha? ______________________

DESCUBRO MÁS

¿Cuánto suman la probabilidad de que la ficha sea mula y la probabilidad de que no lo sea? ¿Y para la probabilidad de que sea 1-6 y la probabilidad de que no sea 1-6?

Validen en grupo sus resultados. Analicen cuánto suman la probabilidad de que al escoger una ficha esta sea mula y la probabilidad de que no lo sea. Expliquen cómo se interpreta esa suma y comenten la información del recuadro.

En el experimento de tomar al azar una ficha de dominó, el espacio muestral tiene 28 elementos (el total de fichas). El evento "Es una mula" tiene 7 casos favorables de 28 posibles, $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$; mientras que el evento "No es una mula" complementa el espacio muestral: tiene 21 casos favorables de 28 posibles, $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$.

La suma de las probabilidades de estos dos eventos es $\frac{7}{28} + \frac{21}{28} = \frac{28}{28} = 1$.

Este tipo de eventos se llaman *eventos complementarios*.

espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado común, el espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

2. La baraja inglesa consta de 52 cartas, cuyas características se muestran en la siguiente tabla. Analízalas y contesta.

		Cartas en orden creciente												
		A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
Palos	♥	(Corazones)												
	♦	(Diamantes)												
	♣	(Tréboles)												
	♠	(Espadas)												

MÁS IDEAS

Las letras A, J, Q y K de la baraja inglesa corresponden a las cartas "As" (del inglés *Ace*), "Jota" (*Jack*), "Reina" (*Queen*) y "Rey" (*King*), respectivamente.

a) ¿Cuántas cartas hay de cada número o letra para que en total sean 52? ______

b) ¿Cuántas cartas hay de cada palo? ________

c) Después de barajear las cartas, se colocan bocabajo y se toma una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta escogida…

- sea un as (A)? __________
- no sea roja? __________
- sea el rey (K) de espadas? _________
- no sea un as? ________
- no tenga un número par? ________
- no sea el rey de espadas? ________
- sea roja? ________
- tenga un número par? ________

Valida tus resultados con el resto del grupo. Identifiquen los eventos que son complementarios y verifiquen que sus probabilidades suman 1. Comenten la información del recuadro.

En un experimento aleatorio, la probabilidad del evento A se expresa como P(A), que se lee "La probabilidad de A". Por ejemplo, para el lanzamiento de un dado, si el evento A es "Cae un 5", entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

El evento "No cae 5", al lanzar un dado, es el complemento de A. Su probabilidad se expresa como $P(\overline{A})$, que se lee "La probabilidad del complemento de A". En este caso, $P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$.

Nótese que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

DESCUBRO MÁS

Si se saca una carta al azar de una baraja inglesa, ¿qué es más probable: que sea un 2 o un as?

3. Se toma una carta al azar de una baraja inglesa. Considera que el evento B es "Se obtiene un 10 negro" y calcula lo siguiente.

- $P(B) =$ ____________________
- $P(\overline{B}) =$ ____________________
- $P(B) + P(\overline{B}) =$ _______________
- $1 - P(B) =$ ____________________

Lección 29. Comparación de probabilidades

DESCUBRO MÁS
En el experimento de lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de ambos sea 12?

1. Trabaja en equipo. Consideren el experimento de lanzar dos dados de diferentes colores.

   a) Completen el diagrama con el espacio muestral del experimento. Por ejemplo, (2, 6) es una manera abreviada para indicar que el dado negro (primer número) cae en 2 y el dado blanco (segundo número) cae en 6.

Dado blanco						
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
5	(1, 5)				(5, 5)	
4	(1, 4)			(4, 4)		
3	(1, 3)		(3, 3)			
2	(1, 2)	(2, 2)				
1	(1, 1)					
	1	2	3	4	5	6

Dado negro

   b) Cristina y Dante jugarán a lanzar ambos dados. Cristina gana si el producto de los números que salen es par; Dante gana si la suma de los números es par. Discutan si ambos tienen igual probabilidad de ganar y anoten aquí su conclusión.

   ____

   ____

   ____

   c) Consideren los eventos A: "El producto es un número par" y B: "La suma es un número par". Calculen lo que se pide.

   - P(A) = ____________________
   - P(B) = ____________________
   - 1 – P(A) = ____________________
   - P($\overline{A}$) = ____________________
   - 1 – P(B) = ____________________
   - P($\overline{B}$) = ____________________

   d) Describan dos nuevos eventos, C y D, que tengan igual probabilidad para el lanzamiento de dos dados.

   Evento C: ____________________________________

   Evento D: ____________________________________

   e) Calculen las probabilidades de los eventos que describieron en el inciso anterior.

   P(C) = ____________________ P(D) = ____________________

Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus resultados. Comenten si los eventos que describió cada equipo son claros y si efectivamente tienen igual probabilidad.

Taller de matemáticas

1. Resuelve los problemas.

a) Cada letra de la palabra "ELEFANTE" se anotó en una tarjeta; todas las tarjetas se revolvieron y se metieron en una caja. Si se extrae una tarjeta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que...

- tenga la letra T? ________________
- tenga la letra E? ________________
- tenga una vocal? ________________
- no tenga la letra A? ________________
- no tenga la letra E? ________________
- tenga una vocal o una consonante? ________________
- tenga la letra O? ________________
- no tenga la letra N o la T? ________________
- Ubica las probabilidades del inciso anterior en la escala de la probabilidad.

0 ———————————————— 1

b) En una escuela secundaria todos los estudiantes se inscriben a un taller, distribuidos como se muestra en la tabla.

Taller de...	Número de alumnos
electricidad	120
computación	80
carpintería	150
música	45

Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que...

- pertenezca al taller de música? ________________
- no pertenezca al taller de carpintería? ________________

c) Una caja contiene 10 esferas numeradas del 1 al 10. Se extrae una esfera al azar y se definen los siguientes eventos.

A: sale un número mayor que 6.
B: sale un número par.
C: no sale un número mayor que 6.

Calcula las siguientes probabilidades.

- $P(A) =$ ________________
- $P(B) =$ ________________
- $P(C) =$ ________________
- $P(A) + P(C) =$ ________
- $P(\overline{B}) =$ ________________

DESCUBRO MÁS

Si la probabilidad de un evento M es $P(M) = \frac{1}{2}$, ¿qué es más probable: que suceda o que no suceda M?

SECUENCIA 11

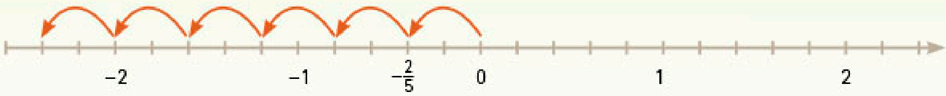
Números con signo II

Lección 30. Multiplicación de números con signo

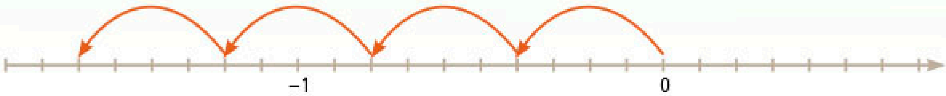
Aprendizaje esperado: resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

1. Trabaja con un compañero. Completen la tabla representando, mediante sumas y multiplicaciones, lo que indican las flechas en cada recta.

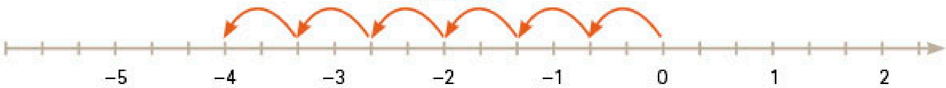
Recta A



Recta B



Recta C



Recta	Suma y resultado	Multiplicación y resultado
A	$\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) =$	$6\left(-\frac{2}{5}\right) =$
B		
C		

2. Completen las operaciones de la tabla. Después, representen esas operaciones en las rectas D, E y F (escojan la graduación que consideren adecuada para cada recta).

DESCUBRO MÁS
Si 4 veces $-\frac{3}{4}$ es igual a $4\left(-\frac{3}{4}\right)$, ¿a qué es igual $\frac{2}{5}$ veces $-\frac{3}{4}$?

Recta	Suma y resultado	Multiplicación y resultado
D	$\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) =$	
E		$3(-0.5) =$
F		$3\left(-\frac{4}{5}\right) =$

Recta D

Recta E

Recta F

3. Anoten los resultados que faltan en la tabla. Después, respondan o hagan lo que se indica.

×	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$
$-\frac{3}{5}$						$\frac{6}{25}$	
$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{25}$						
$-\frac{1}{5}$				0			
0							
$\frac{1}{5}$							
$\frac{2}{5}$			$\frac{2}{25}$				
$\frac{3}{5}$							$-\frac{9}{25}$

a) Verifiquen, para la tabla anterior, que en cada fila o columna de resultados hay una sucesión de números que aumenta o disminuye de manera constante. Por ejemplo, hay una fila que tiene la sucesión $-\frac{6}{25}, -\frac{4}{25}, -\frac{2}{25}, 0, \frac{2}{25}, \frac{4}{25}, \frac{6}{25}$, en la que cada término se obtiene sumando $\frac{2}{25}$ al anterior. A este número constante que se suma se le llama *constante aditiva*.

b) Identifiquen una fila o columna de resultados en la que la constante aditiva sea $-\frac{2}{25}$ y anoten la sucesión correspondiente.

____

DESCUBRO MÁS

¿Cuál es la constante aditiva en la sucesión $\frac{9}{25}, \frac{6}{25}, \frac{3}{25}, 0, -\frac{3}{25}, -\frac{6}{25}, -\frac{9}{25}$?

4. Hagan, en su cuaderno, una tabla similar a la de la actividad 3, con los mismos números, pero escritos en notación decimal. Después, completen los enunciados con las palabras "positivo", "negativo" y "cero".

a) El producto de dos números fraccionarios o decimales, uno positivo y otro negativo, es un número ______________.

b) El producto de dos números fraccionarios o decimales, ambos positivos o ambos negativos, es un número ______________.

c) El producto de un número fraccionario o decimal por cero es igual a__________.

Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de esta lección. Identifiquen juntos la constante aditiva en cada fila y columna de resultados de la tabla que construyeron.

Lección 31. ¿Qué número multiplicado por $-\frac{3}{4}$ da $\frac{2}{3}$?

1. Trabaja en pareja. Anoten el factor faltante en cada multiplicación.

a) $\frac{1}{4} \times$ ___ $= \frac{1}{3}$

b) ___ $\times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times$ ___ $= -\frac{5}{6}$

d) ___ $\times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$

e) ___ $\times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$

f) $\left(-\frac{5}{8}\right) \times$ ___ $= \frac{1}{4}$

g) $\frac{4}{7} \times$ ___ $= 1$

h) ___ $\times \left(-\frac{9}{5}\right) = 1$

Validen sus resultados con el resto del grupo. Comenten si para encontrar el factor faltante usaron la división y si para resolver las divisiones multiplicaron el dividendo por el recíproco del divisor.

2. Trabaja con un compañero. Consideren las multiplicaciones de la actividad anterior y formulen dos divisiones para cada multiplicación. Anótenlas en la tabla; la primera fila está resuelta.

DESCUBRO MÁS
¿Cuál es el recíproco de $\frac{a}{b}$? ¿Y el de $-\frac{a}{b}$?

Multiplicación	Primera división	Segunda división
a) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$	$\frac{1}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{1}{4}$
b) ___ $\times \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$	___ ÷ ___ = ___	___ ÷ ___ = ___
c) $\left(-\frac{2}{3}\right) \times$ ___ $= -\frac{5}{6}$		
d) ___ $\times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$		
e) ___ $\times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$		
f) $\left(-\frac{5}{8}\right) \times$ ___ $= \frac{1}{4}$		
g) $\frac{4}{7} \times$ ___ $= 1$		
h) ___ $\times \left(-\frac{9}{5}\right) = 1$		

3. Anota la multiplicación que corresponde al título de la lección y la división que permite contestar la pregunta.

Multiplicación: ______________________________

División: ______________________________

Valida tus respuestas con el resto del grupo. Comenten cómo resolvieron la división de la actividad anterior.

4. Anota el factor faltante en cada multiplicación.

a) 0.4 × ____ = 2.44 b) ____ × 1.6 = 0.8

c) –3.5 × ____ = –2.8 d) ____ × 2.5 = –3.8

e) –0.28 × ____ = 0.7 f) ____ × (–0.05) = 2.5

5. Concluye la tabla completando cada multiplicación de la actividad 4 y anota las dos divisiones que le corresponden.

Multiplicación	Primera división	Segunda división
a) 0.4 × ____ = 2.44	2.44 ÷ 0.4 = ____	2.44 ÷ ____ = 0.4
b) ____ × 1.6 = 0.8		
c) –3.5 × ____ = –2.8		
d) ____ × 2.5 = –3.8		
e) –0.28 × ____ = 0.7		
f) ____ × (–0.05) = 2.5		

6. Anota, para cada inciso, una operación que cumpla lo que se indica.

a) Una multiplicación de fracciones, cuyo producto sea $-\frac{3}{4}$. ____________________

b) Una división de fracciones, cuyo cociente sea $-\frac{3}{7}$. ____________________

c) Una multiplicación de números decimales, cuyo producto sea –2.52.

____

d) Una división de números decimales, cuyo cociente sea –0.5. ____________________

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus resultados de las actividades 4, 5 y 6. Comenten cómo encontraron el factor faltante y cómo resolvieron las divisiones. Después, analicen la información del recuadro.

Como te habrás dado cuenta, la regla de los signos que se usa al multiplicar y dividir números enteros, también es válida para los números fraccionarios y decimales, positivos o negativos, de manera que:

- al multiplicar o dividir dos números fraccionarios o decimales, uno positivo y otro negativo, se obtiene un número negativo;
- al multiplicar o dividir dos números fraccionarios o decimales, ambos positivos o ambos negativos, se obtiene un número positivo.

TIC MÁS Practica la multiplicación y división de números con signo en www.redir.mx/SCMM2-073a.

Lección 32. Multiplicación y división de números con signo

1. Trabaja con un compañero. Resuelvan las operaciones.

a) $-5 \times (-4 + 2) =$ ______

b) $-\frac{3}{4}\left(0.5 - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) =$ ______

c) $-\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \left(-\frac{4}{5}\right) \div \frac{1}{2} =$ ______

d) $\frac{7}{8} - \left(-\frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{5}\right) \div \frac{5}{6}\right) =$ ______

e) $-5.4 \div (-0.1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) =$ ______

Comparen sus respuestas con las del resto del grupo. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben, identifiquen los errores y corrijan. Después, comenten la información del recuadro.

La jerarquía de operaciones, que estudiaste en primer grado, también se usa para operar con números fraccionarios o decimales con signo:

- primero se resuelven las operaciones entre paréntesis (y se eliminan los paréntesis);
- después, las multiplicaciones y divisiones;
- por último, las sumas y restas.
- Si hay dos o más operaciones con la misma jerarquía, por ejemplo, una suma y una resta, estas se efectúan de izquierda a derecha.

MÁS IDEAS

En la lección 7 aprendiste a qué se le llama "cuadrado de un número" y conociste el significado de expresiones como 3^2, 5^2, x^2.

2. Considera las expresiones y responde.

- $n - 2$
- $2n$
- n^2
- $\frac{n}{2}$
- $\frac{2}{n}$

¿Cuál de las expresiones anteriores produce el mayor valor cuando…

a) n se encuentra entre 1 y 2? ______

b) n se halla entre 0 y 1? ______

c) n es un número negativo? ______

3. Anota, en cada caso, el signo de operación (+, −, × o ÷) que hace la igualdad verdadera.

a) -35.6 ___ $0.1 = -356$

b) -35.6 ___ $0.1 = -35.5$

c) -35.6 ___ $0.1 = -35.7$

d) -35.6 ___ $0.1 = -3.56$

Valida, en grupo, tus resultados de las actividades 2 y 3. Comenten qué le sucede a una cantidad al dividirla o multiplicarla por un número entre 0 y 1.

Taller de matemáticas

1. Anota el número que falta en cada cuadrícula para que ambos productos en diagonal sean iguales.

a)

−6.2	9.3
−8.2	

b)

2.5	5
	−10.1

c)

−5	−8
−7	

d)

15	−21
−20.4	

2. Anota los números que faltan en la tabla. Los números en los bordes izquierdo y superior son factores (números que se multiplican); los demás números son los productos respectivos. Por ejemplo, el −12 se obtuvo al multiplicar −3 × 4.

×	5	4	−8	−2
		−2	4	
−3		−12		6
	35			−14
				12

3. Calcula el valor de las siguientes expresiones si $a = -\frac{1}{2}$.

a) $3a - 1 =$ ______

b) $3(a - 1) =$ ______

c) $3a + 1 =$ ______

d) $3(a + 1) =$ ______

4. En una prueba de cálculo mental se obtienen 2 puntos (+2) por cada respuesta correcta y se pierde un punto (−1) por cada respuesta incorrecta.

a) Un alumno resolvió 18 cuentas y acertó solo en la mitad. ¿Cuántos puntos obtuvo?

____

b) Otro alumno resolvió 18 cuentas y obtuvo 15 puntos. ¿Cuántas respuestas tuvo mal?

____

MÁS IDEAS

Si dos factores son ambos positivos o ambos negativos, el producto es positivo; si un factor es positivo y el otro negativo (o viceversa), el producto es negativo.

SECUENCIA 12

Potencias

Lección 33. Crecimiento exponencial

Aprendizaje esperado: resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

ME COMPROMETO

Comunico ideas o noticias importantes a los miembros de mi comunidad, pero evito difundir chismes e información de dudosa procedencia o utilidad.

DESCUBRO MÁS

¿Qué distingue a una noticia de un chisme? ¿Consideras que algunos medios de comunicación llaman noticias a temas que no lo son?

1. Analiza la información y responde o haz lo que se pide.

Irma vive en un lugar donde las noticias se propagan rápidamente. A continuación se muestra cómo.

Primera etapa. Irma contó la noticia a tres personas.

Segunda etapa. Cada una la platicó a otras tres.

Tercera etapa. Cada una de estas nueve la platicó a otras tres.

a) ¿Cuántas personas oyeron la noticia en la quinta etapa? ____________

b) Subraya la operación que resuelve la pregunta anterior.

- $3 + 3 + 3 + 3 + 3$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
- $5 \times 5 \times 5$
- $5 + 5 + 5$

c) Ahora en la primera etapa se cuenta la noticia a cuatro personas y en las etapas sucesivas cada persona la refiere a otras cuatro.

¿Cuántas personas sabrán la noticia en la quinta etapa? ____________

d) ¿Y si fuera con cinco personas? ____________

2. Analiza la información y responde.

Se sabe que ciertas bacterias pueden duplicar su número cada 20 minutos.

a) A los 20 min de que se inicie el proceso con una bacteria, ¿cuántas habrá?

____

b) ¿Y después de una hora? ____________

c) ¿En cuántas horas se forma una colonia de 512 bacterias? ____________

Valida tus respuestas con el resto del grupo. Comenten la información del recuadro.

Las multiplicaciones de factores iguales, como $2 \times 2 \times 2$; $3 \times 3 \times 3 \times 3$; $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$; $n \times n \times n \times n \times n \times n$, se pueden expresar en forma exponencial o en potencias: 2^3, 3^4, 7^5, n^6.

El factor repetido es la base y el número que indica cuántas veces aparece es el exponente.

3. Encuentra, en la columna derecha, la expresión equivalente para las de la izquierda. Anota la letra correspondiente.

a) $n \times n \times n \times n$ (___) n^7

b) $n + n + n + n$ (___) $7n$

c) $n + n + n + n + n + n + n$ (___) n^4

d) $n \times n \times n \times n \times n \times n \times n$ (___) $4n$

DESCUBRO MÁS
¿Por qué no es lo mismo $5n$ que n^5?

4. Responde y haz lo que se pide. Puedes usar calculadora.

a) Anota los resultados de las siguientes potencias.

- 4^2 = ______
- 4^3 = ______
- 4^4 = ______
- 4^5 = ______
- 4^6 = ______
- 4^7 = ______

b) Deduce, sin hacer todos los cálculos, cuál será la última cifra del resultado de 4^{20}. _____ ¿Y la última cifra del resultado de 4^{25}? _____

c) ¿Cuál es la última cifra del resultado de 4^n si n es impar? _____ ¿Y si n es par? _____

DESCUBRO MÁS
En la lección 7 aprendiste que $4^2 = 4 \times 4 = 16$. ¿Qué piensas que significa la expresión 4^3?, ¿y la expresión 4^5?, ¿y 4^n?

5. Calcula el valor de las sumas y responde.

- 1 + 3 = _____
- 1 + 3 + 5 = _____
- 1 + 3 + 5 + 7 = _____
- 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = _____
- 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = _____

a) ¿Cuál es la suma de los primeros 20 números impares? ______

b) ¿Y para los primeros 100 impares? ______

MÁS IDEAS
Los resultados de las sumas en la actividad 5 forman una sucesión: 4, 9, 16, ...

6. Calcula mentalmente lo siguiente.

a) $(7 + 4)^2$ = _____

b) $(12 + 9 - 18)^2$ = _____

c) $(23 - 15 + 4 - 8)^3$ = _____

d) $(10 - 4 + 5 - 12)^3$ = _____

7. Anota las cifras que faltan en los recuadros vacíos. Usa tu calculadora.

a) $(\square 5)^2 = \square\square\square$

b) $(\square\square)^2 = \square\square 25$

c) $(\square\square)^3 = \square\square\square 7$

d) $(73\square)^2 = \square 44 \square 44$

e) $(3 \times \square\square)^2 = 54\,756$

f) $(8 + \square 5)^2 = \square\square\square$

DESCUBRO MÁS
¿En qué cifra terminan siempre los resultados de las potencias de 5 (5^1, 5^2, 5^3, 5^4...)?

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas de esta página. Comenten si en la actividad 7 hay resultados diferentes que sean correctos.

Lección 34. Multiplicar y dividir potencias de la misma base

base y exponentes: en una potencia, el factor que se repite se llama *base*; el número que indica cuántas veces aparece el factor se llama *exponente*. En la expresión 3^5, la base es 3 y el exponente es 5.

1. Trabaja en equipo. El largo de un rectángulo es 2^5 cm y su ancho, 2^3 cm. ¿Cuál es el área del rectángulo? ________

2. Completen la tabla y hagan lo que se indica después.

Producto de potencias de la misma base	Forma multiplicativa	Expresión simplificada con la misma base y un solo exponente
$2^3 \times 2^2$	$\underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{Tres veces}} \times \underbrace{2 \times 2}_{\text{Dos veces}}$	
$5^2 \times 5^4$		5^6
$6^5 \times 6$		
$8^3 \times 8^3$		
$9^5 \times 9^3$		
$7^2 \times 7^6$		

a) Expliquen, con un ejemplo, cómo se relacionan los exponentes de la primera y la tercera columna de la tabla anterior.

____

____

b) Expresen el producto $7^3 \times 7^4$ con una sola potencia de base 7: ____________

c) Hagan lo mismo para el producto $10^8 \times 10$: ____________

d) Formulen una regla para expresar el producto de dos potencias con la misma base mediante una sola potencia con esa base.

____

MÁS IDEAS

En $10^1 = 10$ la base aparece una vez como factor, por ello el exponente 1 no suele escribirse.
De manera general, $a^1 = a$ para cualquier número a.

Validen, con ayuda del profesor, las reglas que formularon. Corrijan lo necesario para crear una sola regla entre todo el grupo. Anótenla en su cuaderno.

DESCUBRO MÁS

¿Por qué $2^{10} = 4^5$ y $3^6 = 9^3$?

3. Aplica la regla corregida para resolver los siguientes ejercicios.

a) $2^4 \times 2^6 = 2$___ $= 1024$

b) $4^2 \times 4^3 =$ ____ $=$ _____

c) $3^2 \times 3^4 =$ ____ $=$ _____

d) $9 \times 9^2 =$ ____ $=$ _____

Utiliza calculadora para validar tus respuestas. Si tienes una calculadora científica, averigua cómo se usan los exponentes.

4. El área de un rectángulo es 3^5 cm², el ancho mide 3^2 cm. ¿Cuánto mide de largo?

____

Comenta con el grupo cómo se relacionan las expresiones 3^5 (área de la figura) y 3^2 (ancho) con tu respuesta (largo de la figura).

5. Trabaja en equipo. Completen la tabla y hagan, en su cuaderno, lo que se indica después.

División de potencias de la misma base	Forma multiplicativa	Expresión simplificada con la misma base y un solo exponente
$\frac{5^5}{5^3}$	$\frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5}$	
$\frac{3^6}{3^2}$		3^4
$\frac{9^7}{9}$		
$\frac{8^6}{8^3}$		
$\frac{10^8}{10}$		
$\frac{2^{10}}{2^9}$		

a) Expliquen, con un ejemplo, cómo se relacionan los exponentes de la primera y la tercera columna de la tabla anterior.

b) Expresen el resultado de $\frac{8^9}{8^5}$ como una sola potencia de base 8.

c) Hagan lo mismo para el cociente $\frac{7^5}{7^3}$.

d) Formulen una regla para expresar el cociente de dos potencias con la misma base mediante una sola potencia con esa base.

Validen, con ayuda del profesor, las reglas que formularon. Corrijan lo necesario para obtener una sola regla entre todo el grupo. Anótenla en su cuaderno.

El cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes: $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$, donde m, n, y a son enteros positivos.

Taller de matemáticas

1. Simplifica las expresiones mediante las reglas formuladas en esta lección.

a) $\frac{5^4}{5^2}$ = ______ b) $\frac{6^5}{6}$ = ______ c) $2^5 \times 2$ = ______

d) $12^2 \times 12^3$ = ______ e) $11^9 \div 11^2$ = ______ f) $2^{10} \div 2^2$ = ______

g) $(13^9)(13^3)$ = ______ h) $(17^3)(17^2)$ = ______ i) $\frac{8^5 \times 8^3}{8^3}$ = ______

j) $\frac{(9^3)(9^2)}{9^4}$ = ______

DESCUBRO MÁS

Si aplicas la regla para el cociente de dos potencias de la misma base, ¿cuál es el resultado de $\frac{4^3}{4^3}$? Por otro lado, ¿cuál es el resultado de dividir dos números iguales?

MÁS IDEAS

Los paréntesis se usan para indicar multiplicación; por ejemplo, en lugar de 5 × 4 se escribe (5)(4) o simplemente 5(4).

MÁS IDEAS
En el inciso a), un número podría ser $\frac{3}{3} + 3$; otro, 33×3.

Lección 35. Potencias de potencias

1. Trabaja en equipo. Escriban el número más grande que se puede expresar con las operaciones que conocen y...

   a) tres cifras "3": ___________ b) tres cifras "4": ___________

Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas. Comenten con qué operación obtuvieron el número más grande en cada caso.

2. Analiza las expresiones y subraya la que tiene mayor valor. Después, efectúa lo que se indica.

   - $3 \times 3 \times 3$
   - 33^3
   - 3×33
   - $3 + 33$
   - 3^{33}
   - 3×3^3
   - $(3^3)^3$
   - 3^{3+3}

   a) De las expresiones anteriores, a una se le llama *potencia de una potencia*. ¿Cuál es? ________________

   b) ¿Qué valor representa la potencia de una potencia que identificaste? ____________ Explica, en tu cuaderno, cómo lo calculaste.

3. Trabaja en equipo. Completen la tabla a partir de los ejemplos.

Potencia de potencia	Primero se resuelve el exponente fuera del paréntesis	Después se resuelve el exponente dentro del paréntesis	Expresión simplificada
$(6^2)^4$	$\underbrace{(6^2)(6^2)(6^2)(6^2)}_{\text{Cuatro veces}}$		
$(9^2)^5$		$(9 \times 9)(9 \times 9)(9 \times 9)(9 \times 9)(9 \times 9)$	
$(3^2)^3$			3^6
$(7^4)^2$			
$(8^5)^2$			

Encuentren, de manera grupal y con ayuda del profesor, una regla general para simplificar una potencia de potencia. Anótenla en su cuaderno y comenten la información del recuadro.

MÁS IDEAS
Recuerda que, por convención, el exponente 1 no suele escribirse; por ejemplo $9^1 = 9$.

Las expresiones como $(5^5)^5$, $(3^2)^3$, $(4^3)^2$ o $(a^b)^n$ son *potencias de potencias*. Por ejemplo, en $(3^2)^3$, lo que está dentro del paréntesis, 3^2, es una potencia, que a su vez está elevada a la tercera potencia. Su resultado es $(3^2)^3 = (9)^3 = 729$. También se puede resolver así: $(3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$.

4. Calcula las siguientes potencias de potencias utilizando la regla que encontraron grupalmente. Comprueba, con calculadora, si el resultado es correcto.

a) $(2^3)^2 =$ __________ b) $(3^2)^3 =$ __________

c) $(2^2)^6 =$ __________ d) $(4^3)^2 =$ __________

DESCUBRO MÁS
¿Por qué en los incisos c) y d) se obtiene el mismo resultado?

5. Trabaja en equipo. Indiquen si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Antes de clasificarlas, prueben con algunos ejemplos.

Afirmación	¿Verdadero o falso?
La suma de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada al producto de los exponentes.	
La diferencia de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada al cociente de los exponentes.	
El producto de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.	
El cociente de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes.	
Todo número elevado a la potencia 0 es igual a 1.	
La potencia de una potencia es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.	
La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes.	

Comparen sus respuestas con las de otro equipo. Si hay diferencias, determinen, mediante ejemplos, cuáles son correctas.

6. Aplica las reglas que has aprendido para simplificar las expresiones.

a) $(7^2)(7^3) =$ _____ b) $\frac{5^5}{5^2} =$ _____ c) $(4^6)^3 =$ _____

d) $n^2n^3 =$ _____ e) $\frac{p^3}{p^2} =$ _____ f) $(x^3)^2 =$ _____

g) $(p^a)(p^b) =$ _____ h) $\frac{p^a}{p^b} =$ _____ i) $(p^a)^b =$ _____

7. Escribe los signos = o ≠, según corresponda.

a) $(6^3)(6^2)$ ____ 6^6 b) $\frac{5^5}{5^2}$ ____ 5^3 c) $(4^4)^3$ ____ 4^7

d) $(p^3)(p^7)$ ____ p^{10} e) $\frac{a^6}{a^2}$ ____ a^3 f) $(y^2)^5$ ____ y^{10}

g) $(x^n)(x^m)$ ____ x^{nm} h) $\frac{t^z}{t^w}$ ____ t^{z-w} i) $(z^a)^b$ ____ z^{ab}

j) $\frac{(5^2)(5^3)}{5^3}$ ____ 5^2 k) $\left(\frac{5^5}{5^2}\right)(5^3)$ ____ 5^9 l) $\frac{(2^2)^4}{(2^4)^2}$ ____ 1

m) $\frac{n^a n^b}{n^c}$ ____ n^{a+b-c} n) $\frac{a^n}{a^m}$ ____ $a^{n \div m}$ o) $(a^n)^m$ ____ $(a^m)^n$

MÁS IDEAS
El símbolo ≠ se lee "no es igual a" o "es diferente de"; por ejemplo, 5 ≠ 3, se lee "cinco no es igual a tres" o "5 es diferente de 3".

Lección 36. Exponentes negativos

1. Trabaja en equipo. En las lecciones anteriores se concluyó que el cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Completen, de acuerdo con esta propiedad, la tabla.

Expresión	Forma multiplicativa	Simplificación exponencial	Resultado simple
$\frac{6^3}{6^2}$			
$\frac{10^4}{10^2}$	$\frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10}$		
$\frac{4^7}{4^7}$			
$\frac{3^2}{3^3}$			$\frac{1}{3}$
$\frac{2^3}{2^5}$		$2^{3-5} = 2^{-2}$	
$\frac{3^5}{3^7}$			
$\frac{a^x}{a^y}$			
$\frac{b^n}{b^n}$			

MÁS LIBROS
El número 1 729 es el entero positivo más pequeño que puede expresarse como suma de dos cubos de dos maneras distintas: 1 729 = $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. A los números como este se les llama *números de Ramanujan*, en honor a uno de los matemáticos más brillantes del siglo XX. Te recomendamos la novela *El contable hindú*, de David Leavitt, que narra la amistad entre Ramanujan y el matemático inglés G. H. Hardy.

Validen, en grupo y con ayuda del profesor, los resultados de la tabla. Verifiquen, en particular, que se cumpla la siguiente información.

El exponente negativo surge de una división de dos potencias con la misma base, en la que el exponente del dividendo es menor que el del divisor.

Ejemplo: $\frac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2}$

Un número entero elevado a un exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador, el mismo número pero con exponente positivo.

Ejemplo: $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$

2. Trabaja en equipo. Reescriban las expresiones como números decimales.

a) 10^{-4} = ________

b) 5^{-3} = ________

c) 2^{-5} = ________

d) 1^{-7} = ________

e) 4×10^{-2} = ________

f) $4^4 \times 4^{-5}$ = ________

TIC MÁS Aprende más sobre potencias y exponentes en www.redir.mx/SCMM2-082a.

3. Analiza la información para repasar lo que has aprendido hasta ahora sobre potencias y exponentes. Considera que a, b, c, n son números naturales (enteros mayores que 0), y escribe un ejemplo para cada caso.

a) El producto de dos potencias de la misma base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes: $(a^b)(a^c) = a^{b+c}$.

Por ejemplo: ______________________________

b) El cociente de dos potencias de la misma base es igual a la misma base elevada a la diferencia de los exponentes: $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.

Por ejemplo: ______________________________

c) Cuando el dividendo y el divisor tienen la misma base y el mismo exponente, el resultado es la base elevada a la potencia 0: $\frac{a^b}{a^b} = a^{b-b} = a^0 = 1$.

Por ejemplo: ______________________________

d) La potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes: $(a^b)^c = a^{bc}$.

Por ejemplo: ______________________________

e) Un número elevado a una potencia negativa equivale a una fracción de numerador 1 y de denominador igual a la potencia positiva correspondiente: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Por ejemplo: ______________________________

DESCUBRO MÁS

Una persona tiene dos padres, es decir, dos antepasados de una generación anterior. Tiene cuatro abuelos, es decir, cuatro antepasados de hace dos generaciones. Ocho bisabuelos, es decir, ocho antepasados de hace tres generaciones. ¿Cuántos antepasados tiene de hace 20 generaciones? Exprésalo en forma de potencia.

Taller de matemáticas

1. Trabaja con un compañero. Analicen la información y respondan. Pueden usar calculadora.

Para una campaña a favor del medioambiente, los 30 alumnos de un grupo decidieron que, en una primera etapa, cada uno debía invitar a tres personas a separar la basura en orgánica e inorgánica. En una segunda etapa, cada persona invitada en la primera debía invitar a otras tres; y así sucesivamente.

a) Subrayen la expresión que equivale a la cantidad de personas invitadas en la cuarta etapa.

- 3^4
- 30^4
- $3^4 + 30^4$
- $3^4 \times 30^4$
- $30 + 3^4$
- 30×3^4
- $3 + 30^4$
- 3×30^4

b) Escriban una expresión algebraica que indique a cuántas personas se invitan en la etapa n. ______________________________

c) ¿Cuántas personas invitadas hay hasta la etapa 3?

____

SECUENCIA 13

Proporcionalidad II

Lección 37. No todos reciben lo mismo

Aprendizaje esperado: resuelve problemas de proporcionalidad inversa y de reparto proporcional.

1. Analiza la información y haz lo que se pide.

En un campamento, los víveres se distribuyeron por tienda de campaña. La cantidad de víveres que se entregó a cada tienda dependió del número de ocupantes. Un día hubo protestas por el reparto de galletas.

a) Compara lo que recibieron los ocupantes de las tiendas A y B en el reparto de galletas, y anota quiénes piensas que protestaron y por qué.

Tienda de campaña	A	B
Núm. de ocupantes	3	5
Núm. de galletas	7	7

b) Indica, para el par de tiendas en cada tabla, si el reparto te parece justo y explica por qué.

Tienda de campaña	C	D
Núm. de ocupantes	4	4
Núm. de galletas	7	8

Tienda de campaña	E	F
Núm. de ocupantes	3	6
Núm. de galletas	7	12

Tienda de campaña	G	H
Núm. de ocupantes	3	2
Núm. de galletas	5	7

Tienda de campaña	I	J
Núm. de ocupantes	2	8
Núm. de galletas	4	16

Comenta, con tus compañeros y tu profesor, qué condiciones debe cumplir un reparto para que sea justo. Escribe las conclusiones a las que lleguen.

ME COMPROMETO

Al momento de validar respuestas, fomento el intercambio de información: comunico mis ideas a los compañeros y recibo retroalimentación de ellos.

2. Reparte las 80 galletas entre las diez tiendas, de manera que el reparto sea justo para todos. Anota, en la tabla, tus resultados.

Tienda de campaña	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Total
Núm. de ocupantes	3	5	4	4	3	6	3	2	2	8	40
Núm. de galletas											80

Si los grupos de personas fueran del mismo tamaño, para que el reparto fuera justo, bastaría con dar la misma cantidad a cada grupo.

Como los grupos no cumplen con esta condición, para que el reparto sea justo, las cantidades que se dan deben ser proporcionales al tamaño de cada grupo; es decir, si un grupo es dos, tres o *n* veces mayor que otro, debe recibir una cantidad ese mismo número de veces mayor. Cuando esto ocurre, también se dice que es un *reparto proporcional*.

Compara las cantidades que anotaste en la tabla con las que escribieron tus compañeros. Comenten si las calcularon de la misma manera.

3. Trabaja en pareja. En la tabla se presentan otras cantidades de víveres; distribúyanlos de manera que los repartos sean proporcionales.

Tienda de campaña	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Total
Núm. de ocupantes	3	5	4	4	3	6	3	2	2	8	40
Núm. de latas de atún											120
Núm. de litros de agua											160
Núm. de panes											50
Kilogramos de queso											10

MÁS IDEAS

Aunque las tiendas sean de distinto tamaño, a las personas les debe corresponder la misma cantidad de cada cosa; por ejemplo, cada persona obtendrá 3 latas de atún y $1\frac{1}{4}$ de pan.

4. Analicen la información y respondan.

Los habitantes de tres pequeñas comunidades harán una obra de drenaje que beneficiará a todos. El costo de los materiales necesarios asciende a $360 000.00. Se decidió que las aportaciones sean proporcionales al número de habitantes de cada comunidad. En la comunidad A hay 120 habitantes; en la comunidad B, 240; y en la comunidad C, 360.

¿Con cuánto debe cooperar cada comunidad? ______________________________

______________________________________ ¿Cuál es la aportación por persona en las tres comunidades? ________________________________

Lección 38. Repartos justos

1. Con base en la información, responde o haz lo que se pide.

en función de: estar "en función de" significa "depender de" o "de acuerdo con"; por ejemplo, decir "en función del tiempo trabajado" equivale a decir "de acuerdo con el tiempo trabajado".

Tres personas abrieron una sastrería y acordaron repartirse las ganancias de cada semana en función del tiempo que trabajará cada quien.

a) En la tabla se indica cuánto trabajó cada socio durante la primera semana, así como las ganancias totales. Distribuye las ganancias en función del tiempo trabajado.

Primera semana	María	Ana	Pedro	Total
Núm. de horas trabajadas (h)	20	8	12	40
Ganancia que le corresponde ($)				2 000.00

b) Distribuye las ganancias de la segunda semana.

Segunda semana	María	Ana	Pedro	Total
Núm. de horas trabajadas (h)	32	12	4	48
Ganancia que le corresponde ($)				2 880.00

c) Reúnete con un compañero y respondan, en su cuaderno, lo siguiente. Usen las respuestas para validar sus resultados del inciso b).

- ¿La suma de lo que ganan los tres juntos es igual a $2 880?
- Ana trabajó el triple de tiempo que Pedro. ¿También ganó el triple?
- María trabajó ocho veces lo que Pedro. ¿También ganó ocho veces lo que él?

d) Completen dos métodos para resolver el inciso b).

Método 1

Si por 48 horas ganaron $2 880, obtuvieron en promedio $________ por hora. Entonces, a Pedro le corresponden 4 × $________ = $240; a Ana, 12 × $________ = $________; y a María, ____ × $________ = $________.

Método 2

4 horas es $\frac{1}{12}$ de 48 horas; así, a Pedro le corresponde $\frac{1}{12}$ de $2 880.00, es decir, $________; 12 horas es $\frac{1}{4}$ de 48 horas, por tanto, a Ana le corresponde la cuarta parte del total, es decir, $________; finalmente, 32 horas es $\frac{2}{3}$ partes del total, por tanto, a María le corresponden ____ × $2 880.00 = $________.

2. Tres amigos reunieron su dinero para comprar un boleto de $250.00 para una rifa. Luis aportó $50.00; Jaime, $125.00; y Rosa, $75.00. Tuvieron suerte y ganaron un premio de $2000.00. Entre todos decidieron que las cantidades que les correspondieran fueran proporcionales a lo que dieron para comprar el boleto.

a) ¿Cuánto dinero recibirá cada uno? ______________________

____

b) Para validar tus resultados, responde, en tu cuaderno, lo siguiente.

- ¿La suma de lo que obtendrá cada uno es igual a $2000.00?
- Luis pagó la quinta parte del boleto. ¿Recibió también $\frac{1}{5}$ del premio?
- Jaime aportó 2.5 veces lo que Luis. ¿Su ganancia también es 2.5 veces mayor?

c) Completa las siguientes dos maneras de resolver el problema.

Método 1. El premio ($2000.00) es ____ veces el costo del boleto ($250.00).

	Boleto	× ____ =	Premio
Total	$250	× ____ =	$2000
Luis	$50	× ____ =	
Jaime	$125	× ____ =	
Rosa	$75	× ____ =	

Método 2. Jaime pagó la mitad del boleto; por tanto, recibirá la mitad del premio: $\frac{1}{2}$ × $2000.00 = $__________. Luis aportó la _________ parte del boleto y recibirá $\frac{1}{5}$ del premio: ______ × $2000.00 = $________. ¿Y Rosa? Ella recibirá lo demás: $2000.00 – $________ = $________.

Taller de matemáticas

1. Para hacer un viaje juntas, cuatro amigas reunieron el dinero que cada una tenía: $600.00 de Martha, $600.00 de Pati, $950.00 de Lupita y $850.00 de Marina. Al regresar del viaje, sobraron $150.00, que repartieron de manera proporcional a lo que cada una aportó inicialmente.

a) ¿Qué cantidad de dinero sobrante le corresponde a cada amiga?

____

b) ¿Cuánto habría recibido cada amiga si hubieran sobrado $450.00?

____

MÁS IDEAS

Para validar la respuesta a un problema, conviene verificar si el resultado cumple o no ciertas condiciones. Por ejemplo, en la actividad 2, la suma de las ganancias individuales debe ser igual a las ganancias totales, además, si una persona aportó la mitad del costo del boleto, su parte del premio debe ser también la mitad del total.

DESCUBRO MÁS

Si el boleto de una rifa cuesta *n* pesos y el premio obtenido es de *m* pesos, ¿cuánto corresponde, del premio obtenido, a cada peso aportado para el boleto?

SECUENCIA 14

Sistemas de ecuaciones I

Lección 39. Adivinanzas con números

Aprendizaje esperado: resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Trabaja en equipo. Respondan o hagan lo que se pide.

a) Pensé dos números; al restar uno del otro obtengo 2. ¿Cuáles son? __________

b) La adivinanza anterior tiene más de una respuesta correcta. Escriban al menos cinco soluciones más (distintas). ______________________________

c) ¿Cuántas soluciones consideran que tiene la adivinanza si toman en cuenta que los números pueden ser positivos o negativos, enteros o no enteros?

____

d) Consideren que x es el número menor y y, el mayor. A continuación hay cuatro ecuaciones: tres representan a la adivinanza anterior y una, no. Escriban cuál es la que no corresponde y expliquen por qué.

- $y - x = 2$
- $x + y = 2$
- $y = x + 2$
- $x = y - 2$

La ecuación ____________ no corresponde a la adivinanza porque __________

____

Comparen sus resultados con los de otros equipos. Comenten, con ayuda del profesor, la siguiente información y verifiquen si coincide con lo que ustedes pensaron.

La ecuación $y = x + 2$ tiene dos incógnitas y admite una infinidad de soluciones. Cada solución es una pareja de números que cumple con esa igualdad.

MÁS IDEAS

A partir de la ecuación $y - x = 2$ se puede obtener la ecuación equivalente $y = x + 2$; para ello, basta sumar x en ambos miembros de la igualdad y reacomodar términos:
$y - x + x = 2 + x$;
$y = x + 2$.

2. Trabaja en equipo. Lleven a cabo lo siguiente.

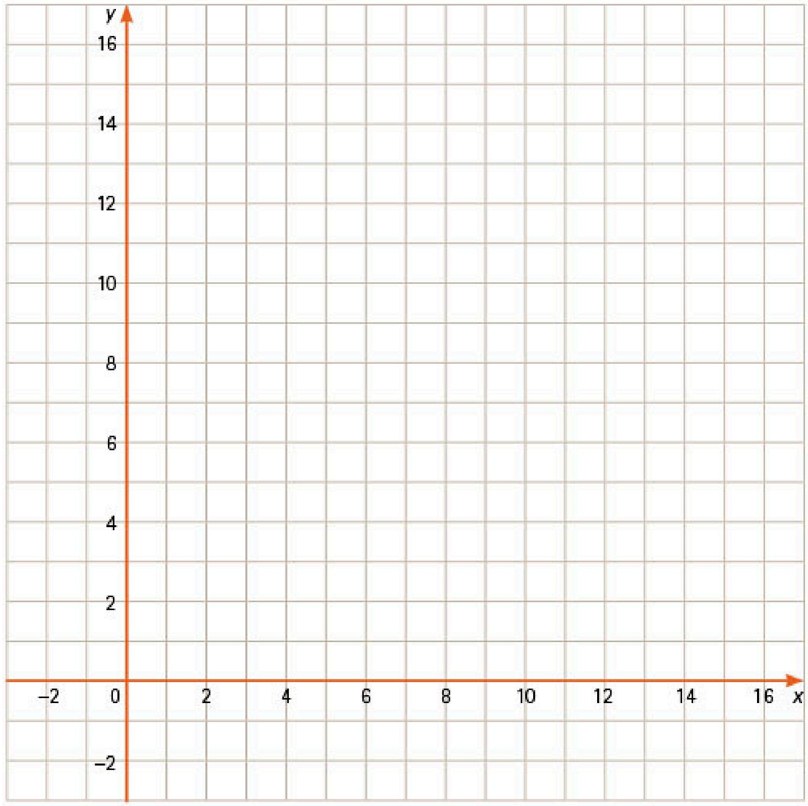
a) Completen la tabla. Observen que cada vez que dan un valor a x y calculan el de y, obtienen una solución de la adivinanza anterior.

x	−2	−1	0	3	5	12	14
$y = x + 2$							

b) Comenten la información del recuadro.

La ecuación $y = x + 2$ puede verse como una regla de correspondencia que nos dice cuánto vale uno de los números (y) cuando fijamos el valor del otro (x).

c) Grafiquen, en el plano cartesiano de la siguiente página, la ecuación $y = x + 2$. Verifiquen que la gráfica pasa por todos los puntos de la tabla anterior.



d) Escojan un punto de la recta cuyas coordenadas no estén en la tabla anterior. Anoten sus coordenadas.

____

e) Verifiquen que esas coordenadas satisfagan la ecuación $y = x + 2$. Analicen la información del recuadro.

La ecuación $y = x + 2$ es del tipo $y = mx + b$. Como aprendiste en el grado anterior, a una ecuación de este tipo también se le llama *ecuación de la recta*, pues la gráfica correspondiente es precisamente una línea recta.

3. Consideren la siguiente adivinanza: "Pensé dos números cuya suma es 12. ¿Cuáles son?".

a) Escriban al menos tres soluciones.

____

b) Llamen x y y a los números. A continuación se presentan cuatro ecuaciones; subrayen la que no corresponde a la adivinanza anterior.

- $x + y = 12$
- $y = -x + 12$
- $x = 12 - y$
- $y = 12 + x$

c) Completen la tabla y grafiquen la ecuación $y = -x + 12$ en el plano cartesiano de la actividad anterior.

x	–2	–1	0	3	5	12	14
$y = -x + 12$							

4. Consideren al mismo tiempo las adivinanzas de las actividades 1 y 3: "Pensé dos números, al restarlos obtengo 2 y al sumarlos, 12. ¿Qué números son?".

a) Escriban aquí una solución: x = ____ y = ____. Expliquen, en su cuaderno, cómo la encontraron.

b) ¿Cuántas soluciones estiman que haya: una, varias o una infinidad? ________

c) Observen que las rectas que trazaron en esta lección se cortan en un punto.

¿Cuáles son sus coordenadas? _______

Validen sus respuestas con el resto del grupo. Verifiquen que las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas cumplen con las condiciones de las dos adivinanzas. Anoten, en el cuaderno, sus conclusiones.

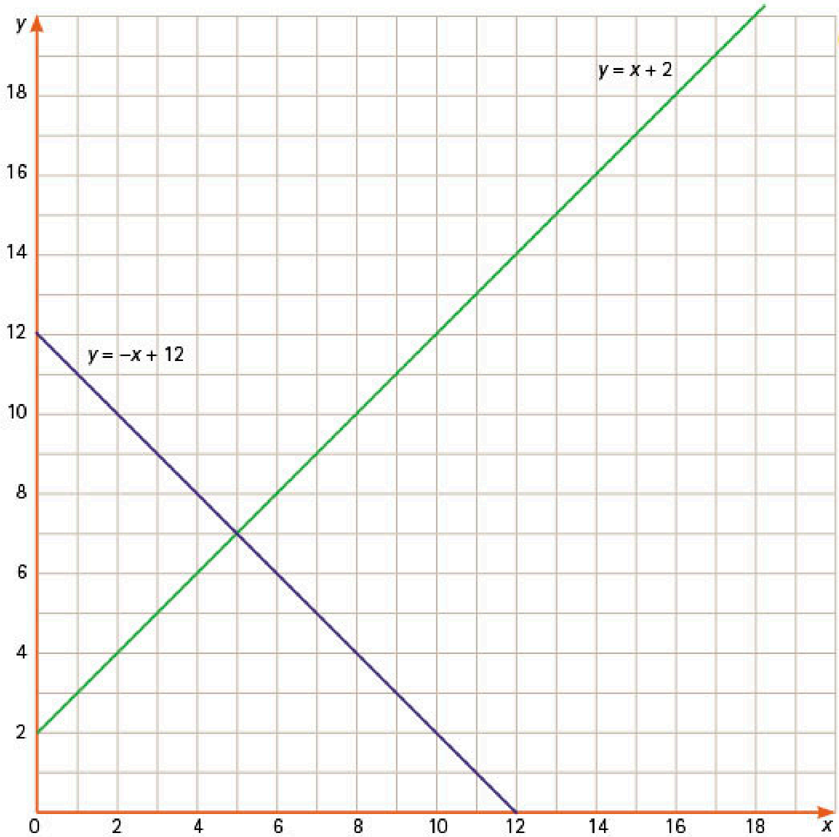
MÁS IDEAS

Para recordar más sobre las ecuaciones del tipo $y = mx + b$, consulta tu libro de primer grado. Si es el de Conecta Más, consulta la secuencia 25.

MÁS IDEAS

En el inciso b) de la actividad 3, tres de las ecuaciones son equivalentes; es decir, cualquiera de ellas se puede obtener de otra, y las tres ecuaciones tienen las mismas soluciones. Es más cómodo trabajar con la expresión $y = -x + 12$ cuando lo que se quiere es encontrar valores de y a partir de valores de x.

Lección 40. Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones



1. Trabaja con un compañero. Lean la información y anoten lo que falta.

En la lección anterior aprendieron que las ecuaciones $y = x + 2$, $y = 12 - x$ tienen, por separado, infinidad de soluciones. Por ejemplo, tres soluciones de la primera ecuación son:

____

También observaron que solo hay un par de valores que resuelve al mismo tiempo ambas ecuaciones:

$x =$ ____ , $y =$ ____.

Ese par es la solución del sistema de ecuaciones.

Finalmente, identificaron que cada ecuación corresponde a una recta en el plano cartesiano. Las coordenadas del punto de corte de ambas rectas son precisamente la solución del sistema:

Coordenadas del punto de intersección: (___, ___).

sistema de ecuaciones: dos o más ecuaciones que tienen en común por lo menos una incógnita. Resolver el sistema consiste en encontrar los valores de cada incógnita con los que se satisfacen todas las ecuaciones.

2. Trabaja en equipo.

a) Encuentren al menos tres soluciones para cada ecuación.

$x + 2y = 7$	$2x + y = 8$
$x =$ ____; $y =$ ____	$x =$ ____; $y =$ ____
$x =$ ____; $y =$ ____	$x =$ ____; $y =$ ____
$x =$ ____; $y =$ ____	$x =$ ____; $y =$ ____

b) Hallen un par de números que resuelva las dos ecuaciones al mismo tiempo, es decir, un par que resuelva el sistema de dos ecuaciones.

$x =$ ____; $y =$ ____

Verifiquen, con sus compañeros y con ayuda del profesor, que los dos números propuestos resuelvan, efectivamente, las dos ecuaciones. Comparen las maneras en que encontraron su solución; si los procedimientos fueron distintos, expliquen por qué se obtiene el mismo resultado. Comenten la información del recuadro.

ME COMPROMETO

Al momento de validar respuestas, verifico si mi solución es correcta y analizo cómo resolvieron el problema mis compañeros.

Para encontrar soluciones de ecuaciones dando valores a x y calculando los correspondientes de y, es útil expresarlas como reglas de correspondencia, de la forma $y = mx + b$. Por ejemplo, la ecuación $x + y = -3$ se puede expresar así: $y = -x - 3$.

MÁS IDEAS

Una manera usual para denotar un sistema de ecuaciones es encerrar las ecuaciones dentro de una llave:

$$\begin{cases} y - x = 3 \\ 3y + x = 0 \end{cases}$$

3. Hagan lo que se pide para conocer una manera de hallar gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones.

Sistema 1: $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

Paso 1. Se expresan ambas ecuaciones como reglas de correspondencia de la forma $y = mx + b$.

- Verifiquen, en su cuaderno, que la ecuación $x + 2y = 7$ se puede reescribir como $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.
- Reescriban la ecuación $2x + y = 8$ en la forma $y = mx + b$: $y =$_________.

MÁS IDEAS

En la ecuación $x + 2y = 7$, la y se puede despejar así:

$-x + x + 2y = -x + 7$
(se suma $-x$ en ambos miembros)

$2y = -x + 7$
(se simplifica)

$\frac{2y}{2} = \frac{-x}{2} + \frac{7}{2}$
(se dividen ambos miembros entre 2)

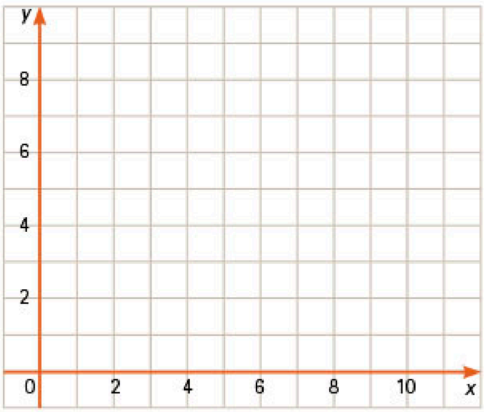
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
(se simplifica)

Paso 2. Se tabulan algunos puntos de cada ecuación y se trazan las gráficas correspondientes en un mismo plano cartesiano.

- Completen las tablas; den valores a x y calculen los correspondientes de y.
- Tracen las gráficas de ambas ecuaciones en el plano cartesiano.

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$	
x	y
1	
3	
5	
7	

$y =$ _________	
x	y
0	
2	
3	
4	



Paso 3. Se localiza el punto donde se cortan las rectas y se verifica que las coordenadas del punto sean solución del sistema.

- Marquen, en la gráfica, el punto donde se cortan ambas rectas. Anoten las coordenadas del punto de intersección: $x =$ _____; $y =$ _____.
- Verifiquen que las coordenadas del punto donde se cruzan ambas rectas satisfagan las dos ecuaciones y, por tanto, sean solución del sistema.

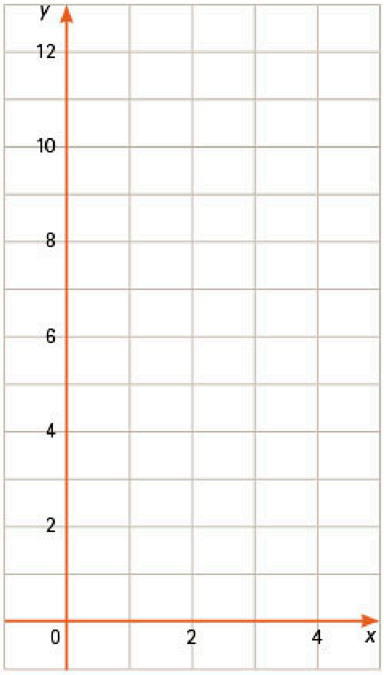
4. Resuelve gráficamente los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas; traza los planos cartesianos en tu cuaderno.

a) $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

TIC MÁS Resuelve gráficamente sistemas de ecuaciones en www.redir.mx/SCMM2-091.

Lección 41. Una, ninguna o muchas soluciones

1. En la lección anterior aprendiste que la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones son las coordenadas del punto donde se cortan las rectas correspondientes. Pero ¿qué sucede cuando las rectas no se cortan?, ¿y cuando coinciden en todos sus puntos? Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones.



$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

Reglas de correspondencia

Ecuación 1: y = ______________________

Ecuación 2: y = ______________________

Tabla 1	
x	*y*
0	
1	
2	
3	
4	

Tabla 2	
x	*y*
0	
1	
2	
3	
4	

2. Trabaja con un compañero. Respondan con base en la actividad anterior. Trabajen en su cuaderno.

a) ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones cuyas gráficas son rectas que no se cruzan?

b) ¿Cómo se puede saber, antes de trazarlas, si se cruzarán las rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones?

MÁS IDEAS
En la ecuación de una recta, $y = mx + b$, m expresa la pendiente de la recta. Si dos rectas tienen la misma pendiente, son paralelas.

3. Hagan lo que se pide acerca del siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + 4y = 12 \end{cases}$

a) Busquen y anoten, para cada ecuación, algunos pares de números que la resuelvan.

- $x + y = 3$: ______________________
- $4x + 4y = 12$: ______________________

b) Busquen un par de números que resuelva una de las dos ecuaciones, pero no la otra. ¿Qué observan? ______________________________________

c) Si se grafican ambas ecuaciones, ¿qué tipo de rectas serán? Pongan una ✔ junto a la respuesta que consideren correcta.

- Dos rectas paralelas.
- Dos rectas que coinciden.
- Dos rectas que se cortan en un punto.

d) Grafiquen el sistema anterior. Completen lo que se solicita y revisen si anticiparon bien de qué tipo de rectas se trata.

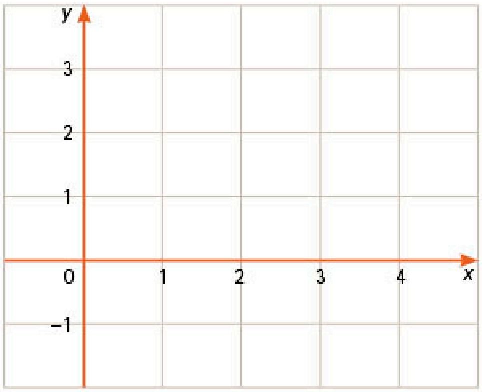
Reglas de correspondencia

Ecuación 1: y = _______________

Ecuación 2: y = _______________

Tabla 1	
x	y
0	
1	
2	
3	
4	

Tabla 2	
x	y
0	
1	
2	
3	
4	



e) ¿Cuántas soluciones tiene un sistema de dos ecuaciones cuando sus gráficas son una misma recta? Expliquen su respuesta.

____

4. Trabaja en equipo. Analicen los siguientes sistemas de ecuaciones y anoten, debajo de cada uno, si tiene una solución, una infinidad o ninguna.

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$ _______________

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$ _______________

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$ _______________

d) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x + 10y = 2 \end{cases}$ _______________

e) $\begin{cases} 4x - 12y = 2 \\ 2x - 6y = 1 \end{cases}$ _______________

f) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x - y = 8 \end{cases}$ _______________

Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.

- Comparen sus respuestas sobre los sistemas analizados. Si hay diferencias, grafíquenlos para comprobar quién tiene razón.
- Completen la tabla.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Si las ecuaciones...	entonces las rectas...	y el sistema...
tienen distinta pendiente,		tiene una solución
tienen la misma pendiente, pero distinta ordenada al origen,		
son equivalentes (una se puede obtener a partir de la otra),		tiene infinidad de soluciones

DESCUBRO MÁS

Una manera rápida para convencerse de que el sistema c) de la actividad 4 no tiene solución es traducir las ecuaciones al lenguaje común.

$x + y = 7$: "dos números que sumen 7";
$x + y = 4$: "dos números que sumen 4".

Es decir, estamos buscando dos números que sumen 4 y, al mismo tiempo, que sumen 7, lo que claramente es imposible.

Una manera rápida de ver que el sistema e) tiene infinidad de soluciones consiste en multiplicar por 2 ambos miembros de la segunda ecuación; al hacerlo, se obtiene...

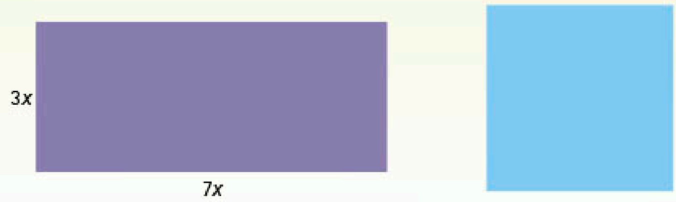
SECUENCIA 15

Expresiones equivalentes II

Lección 42. Equivalencia de perímetros I

Aprendizaje esperado: formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas, y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

1. Trabaja en equipo. El cuadrado y el rectángulo tienen el mismo perímetro. Con base en esta información, contesten o hagan lo que se indica.



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que denota el perímetro del rectángulo?

____

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que denota el perímetro del cuadrado?

____

c) Expliquen por qué las dos expresiones algebraicas anteriores son equivalentes.

____

d) Verifiquen que al simplificar las dos expresiones anteriores, el resultado sea 20x en ambas.

expresiones equivalentes: aquellas que, aunque se escriban diferente, expresan el mismo valor. Por ejemplo, $b + b$ es equivalente a $2b$ para cualquier valor de b.

2. Respondan y hagan lo que se pide. Consideren que el perímetro de cada figura es $6x + 12$.

a) ¿Cuánto mide cada lado, de cada figura, en términos de x? Anoten las medidas en las figuras; puede haber soluciones diferentes para el rectángulo.

b) Verifiquen que, para las medidas que anotaron, la suma de las medidas de los lados del rectángulo es igual a la suma de las medidas de los lados del hexágono regular.

____

____

____

DESCUBRO MÁS

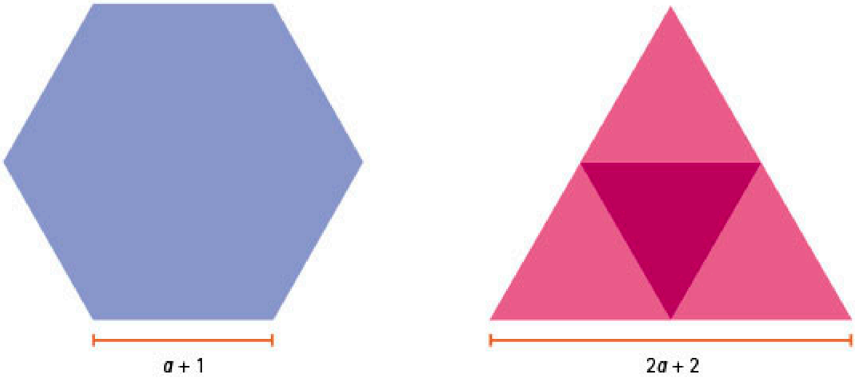
¿Qué expresión multiplicada por 2 da como resultado $6x + 12$?

¿Qué expresión multiplicada por 6 da como resultado $6x + 12$?

Validen, en grupo y con ayuda del profesor, sus resultados de las actividades 1 y 2. Comenten si encontraron soluciones diferentes pero correctas para la actividad 2.

3. Trabaja con un compañero. Contesten y efectúen lo que se indica. El triángulo equilátero exterior y el hexágono regular tienen igual perímetro.

DESCUBRO MÁS
¿Qué tienen en común el triángulo equilátero y el hexágono regular?



a) Tracen tres diagonales del hexágono para dividirlo en seis triángulos iguales.

b) Expliquen por qué los seis triángulos que trazaron son equiláteros.

____

c) Expresen, algebraicamente, la equivalencia entre el perímetro del triángulo exterior y el hexágono. _______________________

d) Consideren que $a = 5$ y verifiquen que la equivalencia anterior es cierta.

____

e) Expresen, algebraicamente, la equivalencia entre el perímetro de un triángulo interior de ambas figuras. _______________________

4. El triángulo equilátero exterior de la actividad anterior está dividido en cuatro triángulos equiláteros iguales.

a) ¿Cuál es el perímetro del triángulo grande? _______________________

b) ¿Y el perímetro de un triángulo pequeño? _______________________

c) ¿Cómo se relacionan ambos perímetros?

____

d) Subrayen la expresión que indica que el perímetro del triángulo grande es el doble que el del triángulo pequeño.

- $2a + 2 = 2(a + 1)$
- $3(2a + 2) = 3(a + 1)$
- $3(2a + 2) = 2(3a + 3)$

Revisen, con sus compañeros y con ayuda del profesor, los resultados de las actividades 3 y 4; si hay diferencias, averigüen quién tiene razón.

ME COMPROMETO
Si al validar resultados encuentro errores de mis compañeros, los señalo de manera respetuosa y argumentada, y les ayudo a entender en qué fallaron y cómo pueden corregir su error.

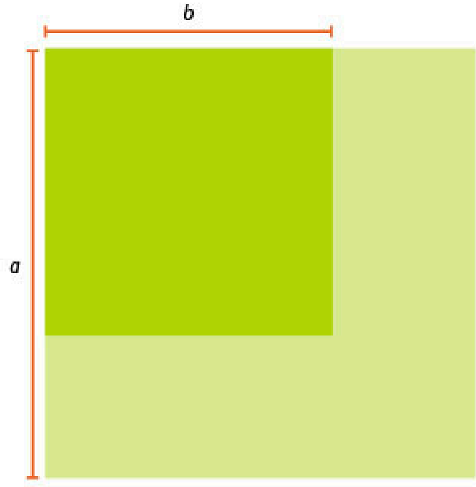
Lección 43. Equivalencia de perímetros II

DESCUBRO MÁS

Si se reacomoda la parte no sombreada para formar un rectángulo cuyo largo es $a + b$, ¿cuánto mide el ancho de ese rectángulo?, ¿cuál es su perímetro?

1. Analiza la información y haz lo que se indica.

En la figura hay dos cuadrados, uno chico (sombreado) y uno grande.



a) Anota la suma de los cuatro lados del cuadrado grande.

____

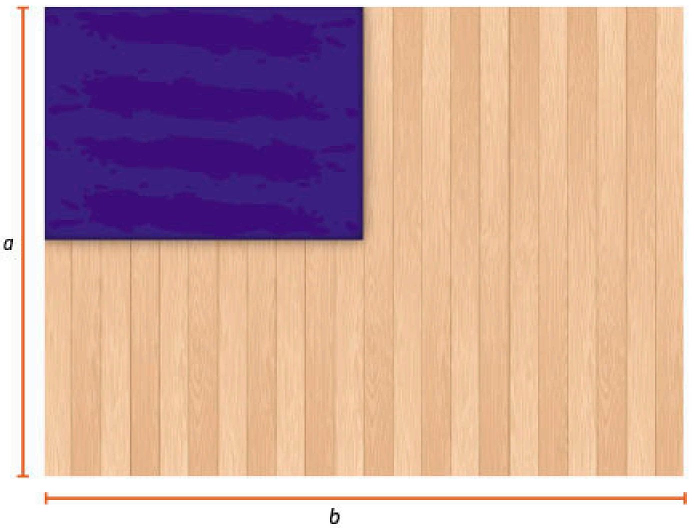
b) Anota la suma de los seis lados de la parte no sombreada.

____

c) Simplifica las dos sumas que anotaste y responde:

¿Qué relación hay entre el perímetro del cuadrado grande y el de la parte no sombreada? _______________

2. Trabaja en equipo. Respondan con base en la imagen.



El dibujo muestra un tapete que cubre la cuarta parte del piso de una habitación.

a) ¿Será cierto que el perímetro de la habitación es equivalente al perímetro de la parte que no cubre el tapete?

____

b) Anoten el perímetro del tapete:

____

____

c) Escriban el perímetro de la parte que no cubre el tapete:

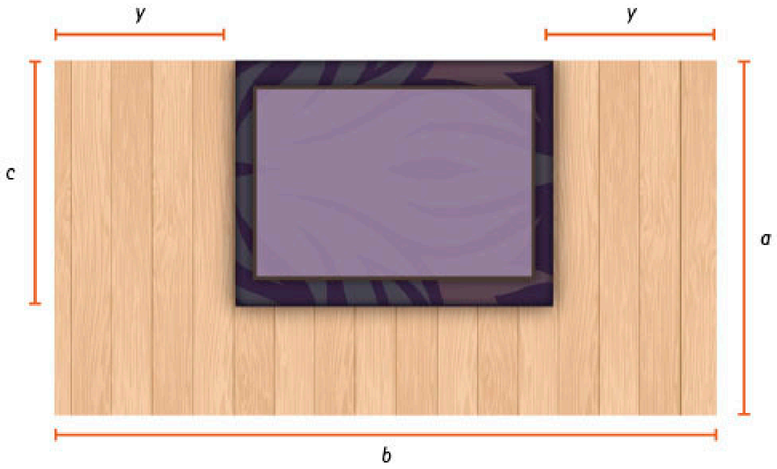
____

d) Anoten el perímetro de la habitación: _______________

e) ¿Fue acertada su respuesta en el inciso a)? _______________

Validen, con sus compañeros, sus respuestas de las actividades 1 y 2. Discutan cómo se puede mostrar geométricamente que los perímetros coinciden.

3. El dibujo muestra el piso de una habitación sobre el que se ha colocado un tapete.



a) De las siguientes expresiones, hay tres que representan el perímetro de la habitación y, por tanto, son equivalentes; subráyalas.

- $2(a + b)$
- $2(a - b)$
- $2a + 2b$
- $a + a + b + b$

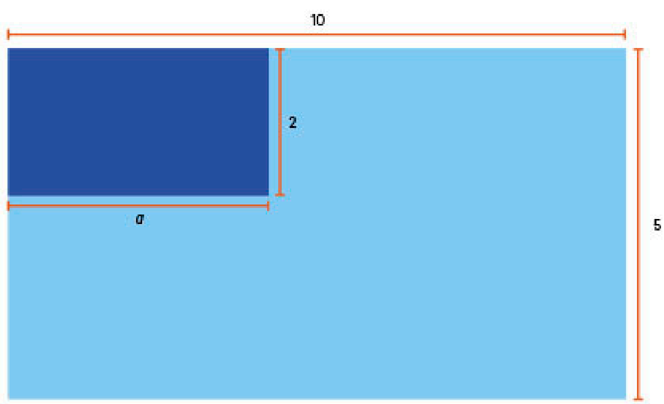
b) Haz lo mismo para las tres expresiones que representan el perímetro del tapete (también son equivalentes).

- $2c + 2(b - 2y)$
- $2c + 2b - 4y$
- $2(c + b - 2y)$
- $2(c + b - y)$

c) Subraya las expresiones equivalentes que representan el perímetro de la parte no cubierta por el tapete.

- $2(a + b + c)$
- $2a + b + 2y + 2c + b - 2y$
- $2(a + b + c - y)$
- $2a + 2b + 2c$

4. Considera la figura y responde.



a) Anota el perímetro del rectángulo completo: ____________________

b) Haz lo mismo para el perímetro del rectángulo pequeño: ________

c) Escribe el perímetro de la parte sombreada con celeste:

____

d) Explica por qué el perímetro del rectángulo completo es el mismo que el de la parte sombreada con celeste.

____

____

____

DESCUBRO MÁS

¿A qué se debe que el perímetro de la parte celeste sea equivalente al del rectángulo completo? ¿Pasaría lo mismo si el rectángulo pequeño llegara hasta la mitad del lado que mide 10?

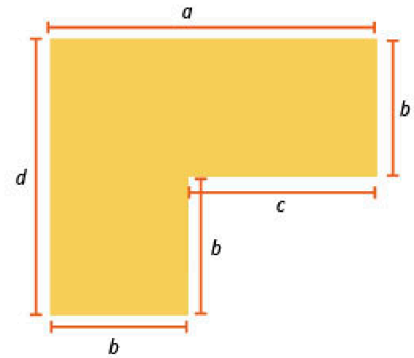
Valida tus respuestas con tus compañeros. Discutan qué pasaría con el perímetro de la parte celeste si a crece, ¿seguiría siendo equivalente al perímetro del rectángulo completo?

Lección 44. Equivalencia de áreas

DESCUBRO MÁS
En la figura, ¿a qué rectángulo corresponde el área db? ¿Y al área cb? ¿Qué representa entonces la expresión $db + cb$? ¿Y la expresión $ad - bc$?

1. Con base en la figura que se muestra, haz lo que se indica.

a) De las siguientes expresiones, tres corresponden al área de la figura y una no. Coloca un ✘ junto a la que no corresponde.



- $ab + b(d - b)$
- $ab + d(a - c)$
- $db + cb$
- $ad - bc$

MÁS IDEAS
En la figura, el área amarilla puede expresarse mediante una resta: área de la figura completa menos área del cuadrado interior.

b) Considera que $a = 8$ cm; $b = 3$ cm; $c = 5$ cm; $d = 6$ cm. Sustituye esos valores en las expresiones que no tachaste y verifica que son equivalentes.

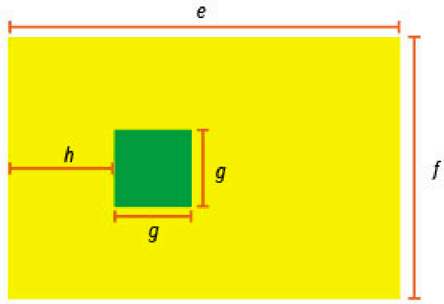
____

____

2. Considera la figura y haz lo que se indica.

a) Expresa el área de la parte sombreada con amarillo.

____



b) De las siguientes expresiones, coloca un ✘ junto a la que no corresponde al área de la parte sombreada con amarillo.

- $ef + g^2$
- $ef - g^2$
- $e(f - g) + gh + g(e - h - g)$
- $fh + f(e - h - g) + g(f - g)$

c) Considera que $e = 15$; $f = 10$; $g = 3$; $h = 4$. Sustituye esos valores en las expresiones que no tachaste y verifica que son equivalentes.

____

____

____

____

____

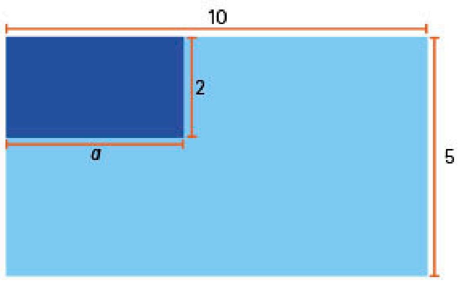
Valida tus respuestas de las actividades 1 y 2 con un compañero. Comenten cómo identificaron en cada caso la expresión que no es equivalente a las demás.

Taller de matemáticas

1. Relaciona, mediante líneas, cada expresión de la izquierda con su equivalente de la derecha.

a) $2(a + 1)$	• $-a + 15$
b) $2\left(\frac{a-b}{2}\right)$	• $6b$
c) $a + a + 1$	• $2a + 2$
d) $12 - (a - 3)$	• $a - b$
e) $4(a + 2b) - 2(2a + b)$	• $2a + 1$

2. Anota dos expresiones equivalentes que representen el área de la parte celeste.

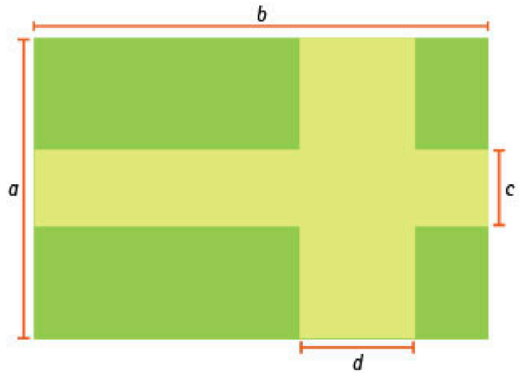


Expresión 1: ____________________

Expresión 2: ____________________

DESCUBRO MÁS
¿Cuántas expresiones equivalentes puedes encontrar para el área de la parte azul?

3. Haz lo que se indica con base en la figura.



a) Expresa, algebraicamente, el área de la cruz.

b) De las siguientes expresiones, subraya la que no corresponde al área de la cruz.

• $bc + ad - cd$ • $ab - [(b - d)(a - c)]$ • $ab - (bc + ad - cd)$

c) Considera que $a = 8$; $b = 12$; $c = 2$; $d = 3$. Sustituye esos valores en las expresiones que no subrayaste y verifica que son equivalentes.

____

____

____

SECUENCIA 16

Construcción de polígonos II

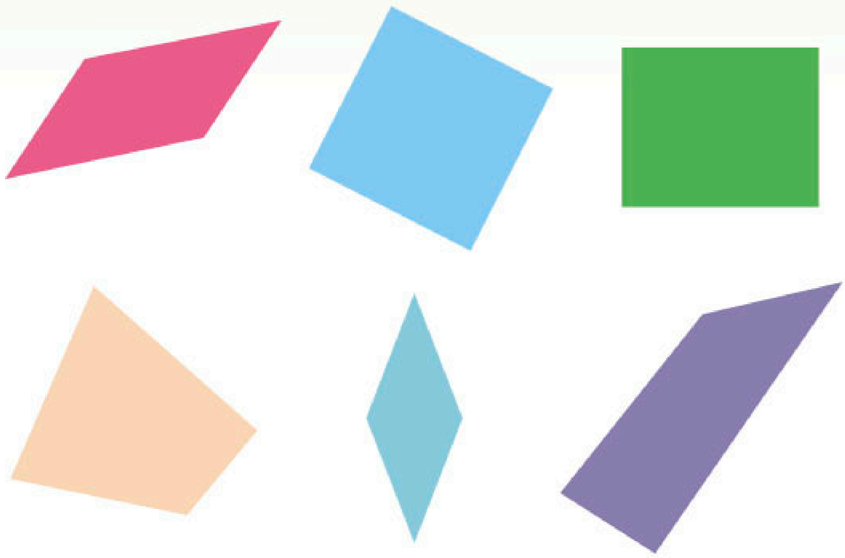
Lección 45. ¿Cuánto suman los ángulos?

Aprendizaje esperado: deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

1. Trabaja en equipo. Respondan o hagan lo que se pide.

a) En primer grado aprendieron que la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es la misma. ¿Cuánto es esa suma? ______________

b) Consideren los siguientes cuadriláteros.



ángulo interior de un polígono: aquel que está dentro de la figura y se forma con dos lados consecutivos de la misma.

hipótesis: suposición que, aunque no ha sido confirmada (o refutada), se piensa que es cierta.

c) ¿La suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros siempre es la misma?

____

Argumenten su respuesta anterior; pueden hacer trazos en las figuras para responder. ______________________________

____

d) Si su respuesta fue afirmativa, ¿cuánto suman los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero? __________

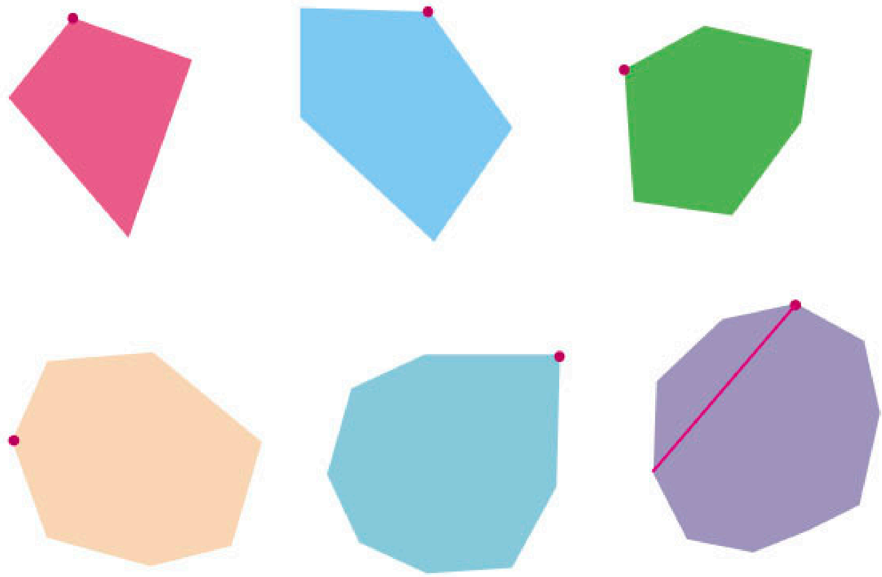
Comparen sus respuestas y argumentos con los del resto del grupo. Aún no es necesario que lleguen a un acuerdo; en las siguientes actividades seguirán explorando ángulos interiores de diversos polígonos.

2. Trabaja con un compañero. Formulen una hipótesis para responder la siguiente pregunta:

En el caso de polígonos distintos del triángulo, ¿la suma de los ángulos interiores siempre es la misma? ______________________________

3. Hagan lo siguiente para comprobar si su hipótesis es verdadera o falsa.

a) En cada polígono, tracen todas las diagonales desde el vértice marcado para dividir la figura en triángulos.



MÁS IDEAS
En cada polígono se forman triángulos al trazar las diagonales desde un vértice; los ángulos interiores de esos triángulos forman los ángulos interiores del polígono.

b) Completen la tabla.

Polígono	Número de lados	Número de triángulos en los que queda dividido	Suma de ángulos interiores
cuadrilátero	4		
pentágono	5		
hexágono	6	4	180°(4)= 720°
heptágono	7		
octágono	8		
nonágono	9		
polígono de n lados	n		

DESCUBRO MÁS
¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de 30 lados?

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y comenten si su hipótesis fue verdadera. Después…

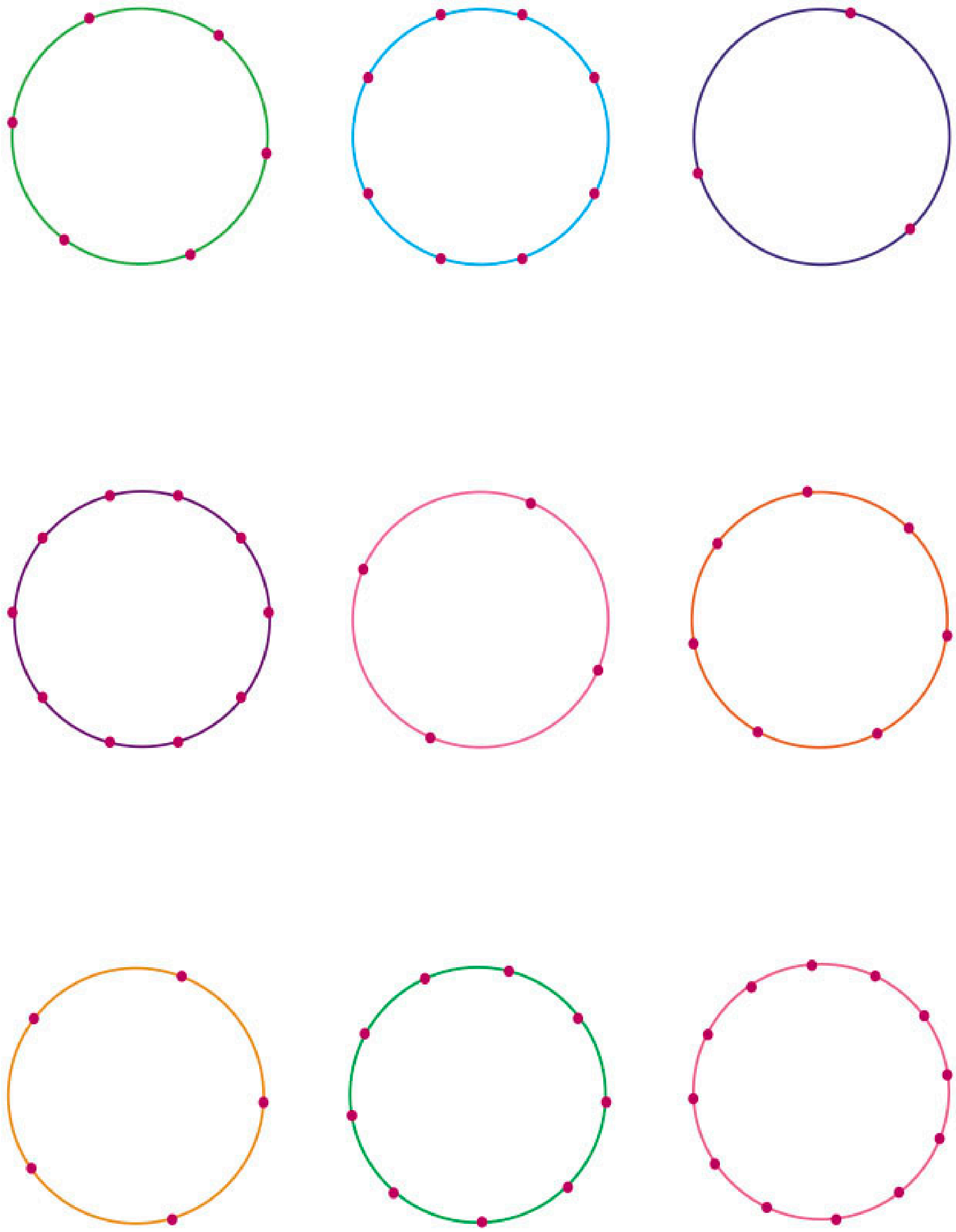
- tracen una diagonal (si aún no lo han hecho) en cada cuadrilátero de la página anterior y verifiquen sus respuestas a esa actividad;
- describan en su cuaderno cómo calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

Lección 46. Ángulos interiores de polígonos regulares

polígono regular: aquel en el que todos sus lados son del mismo tamaño y todos sus ángulos tienen la misma medida.

1. Trabaja en pareja.

a) Unan consecutivamente los puntos en cada circunferencia para trazar polígonos regulares. Usen su regla.



b) Marquen un ángulo interior de cada polígono. Sin medir, averigüen cuánto mide y anoten la medida junto al ángulo. Recuerden que se trata de polígonos regulares y usen lo que han aprendido hasta ahora sobre suma de ángulos interiores en polígonos.

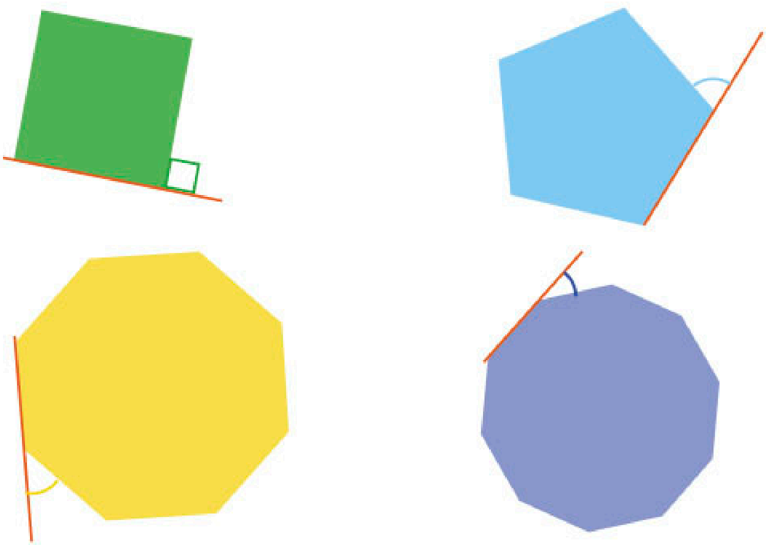
TIC MÁS Investiga cómo usar las herramientas Polígono regular y Ángulo en el programa GeoGebra, y úsalas para validar tus respuestas de la actividad 1.

2. Completen la tabla.

Polígono regular	Número de lados	Suma de ángulos interiores	Medida de un ángulo interior
triángulo equilátero	3		
cuadrado	4		
pentágono	5		
hexágono	6	720°	120°
heptágono	7		
octágono	8		
nonágono	9		
decágono	10		
dodecágono	12		
polígono de *n* lados	*n*		

3. En cada polígono regular se ha marcado un ángulo exterior. Calculen y anoten su medida.

ángulo exterior o externo de un polígono: aquel que está fuera de la figura y se forma con un lado del polígono y la prolongación de uno de los lados consecutivos.



Validen sus respuestas con el resto del grupo. Comenten lo siguiente y anoten las conclusiones en su cuaderno.

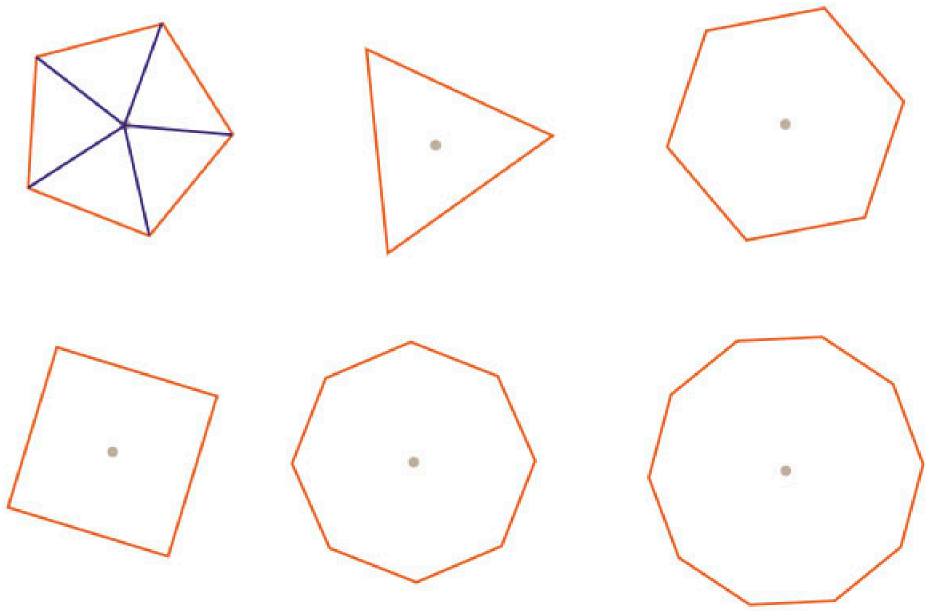
- ¿Cómo se calcula la medida de un ángulo interior y de uno exterior de un polígono regular si se conoce el número de lados?
- ¿Cuántos ángulos exteriores pueden trazarse en cada vértice de un polígono?

Lección 47. Ángulos centrales

ángulo central de un polígono regular: aquel que tiene su vértice en el centro del polígono y cuyos lados pasan por dos vértices consecutivos de la figura.

1. Trabaja en equipo. Analicen la información y respondan o hagan lo que se pide.

a) En el pentágono regular se han trazado sus ángulos centrales; hagan lo mismo con cada uno de los demás polígonos regulares.



b) Sin medir, completen la tabla.

Polígono regular	Número de lados	Medida del ángulo central
triángulo equilátero	3	
cuadrado	4	
pentágono	5	
hexágono	6	60°
octágono	8	
nonágono	9	
decágono	10	
dodecágono	12	
polígono de n lados	n	

c) Comparen, para cada polígono de la tabla anterior, la medida de un ángulo exterior con la medida de un ángulo central. ¿Cómo se relacionan?

Validen sus respuestas con el resto del grupo. Lean y comenten la información del recuadro.

- Si desde un vértice de un polígono de n lados se trazan todas las diagonales, se forman $n - 2$ triángulos.
- Como los ángulos interiores de cada triángulo suman 180°, la suma de los ángulos interiores del polígono es $180°(n - 2)$.
- En un polígono regular de n lados todos los ángulos interiores miden lo mismo y, por tanto, la medida de cada ángulo interior es $\frac{180°(n-2)}{n}$.
- Como los ángulos exteriores forman ángulos de 180° con los ángulos interiores, entonces la medida de un ángulo exterior de un polígono regular se obtiene restando, a 180°, la medida de un ángulo interior.
- En un polígono regular de n lados, cada ángulo central mide $\frac{360°}{n}$.

DESCUBRO MÁS

Utiliza la información del recuadro y lo que sabes sobre expresiones algebraicas equivalentes para mostrar que un ángulo central y un ángulo exterior de cualquier polígono regular siempre miden lo mismo.

Taller de matemáticas

1. Responde las preguntas.

a) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono de quince lados? ____________

¿Y de uno de 20 lados? __________

b) La suma de los ángulos interiores de un polígono es 1800°. ¿Cuántos lados tiene la figura? __________

c) ¿Existe un hexágono cuyos ángulos interiores midan respectivamente 100°, 80°, 150°, 120°, 120° y 90°? __________ Explica por qué.____________________________

d) ¿Cuánto mide el ángulo interno de un polígono regular de 20 lados? ______________

e) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si su ángulo central mide 120°? _________

f) ¿Existe un polígono regular cuyo ángulo interior mide 100°? _____ Explica por qué.

____

g) El ángulo interior de un polígono regular mide 157.5°. ¿Cuánto mide un ángulo central de esa figura? __________

h) El ángulo interior de un polígono regular mide x°. ¿Cuánto mide un ángulo central?

____

SECUENCIA 17

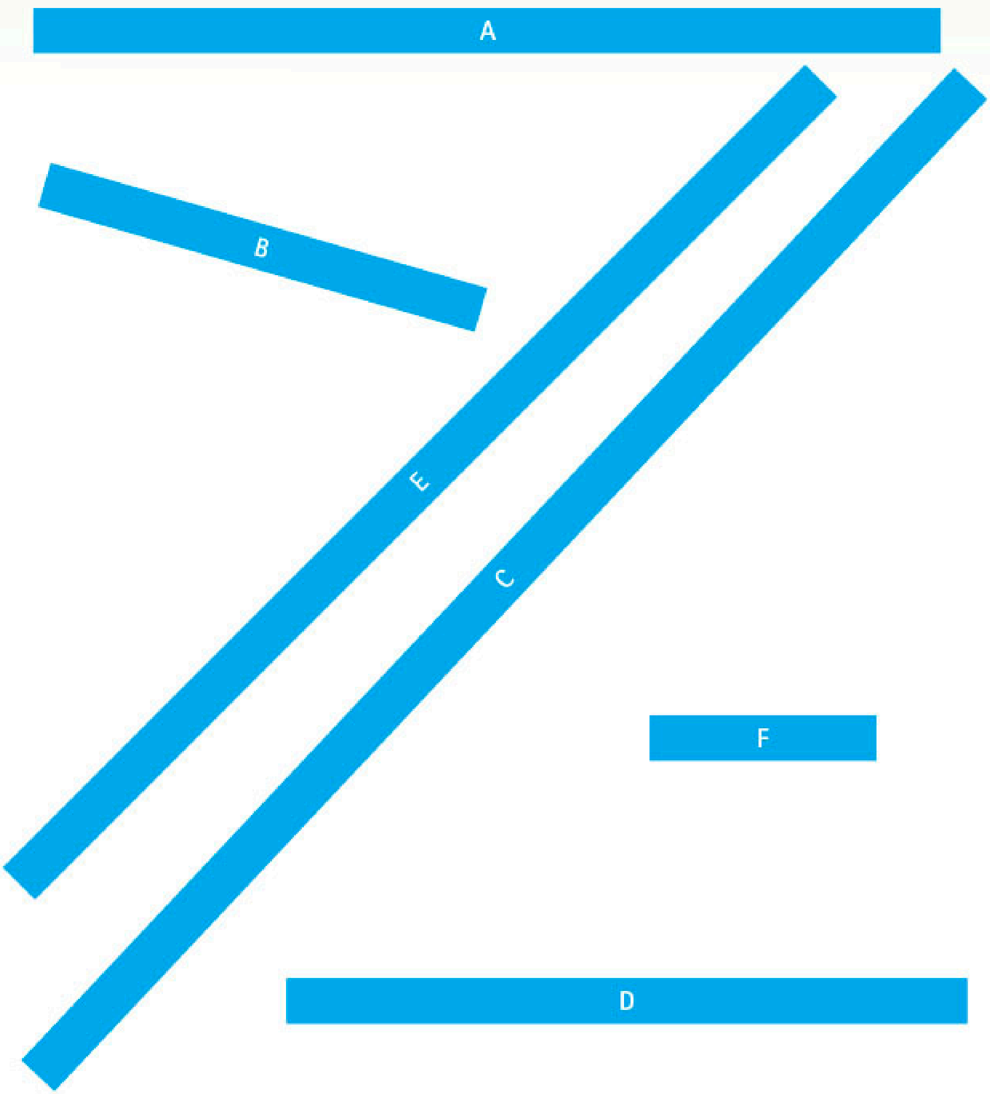
Conversión de medidas I

Lección 48. De una unidad mayor a una menor

Aprendizaje esperado: resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

1. Considera la tira roja como unidad de medida de longitud.

a) Recorta una tira igual a la roja y úsala para medir la longitud de cada una de las siguientes tiras.



MÁS IDEAS
Si la tira no cabe un número entero de veces, puedes doblarla a la mitad, a la cuarta parte, etc.

b) Completa la tabla con las medidas que obtuviste.

Longitud de las tiras si se considera la tira roja como unidad de medida							
Tira	Roja	A	B	C	D	E	F
Longitud							

2. Considera ahora las siguientes unidades.

Esta tira mide la mitad de la tira roja	Esta tira mide la tercera parte de la roja	Esta tira mide la cuarta parte de la roja

a) Sin medir, anota la medida de las tiras para cada unidad de medida.

		Longitud de la tira					
		A	B	C	D	E	F
Unidad de medida	Tira amarilla						
	Tira verde						
	Tira azul						

b) ¿Cómo calcularías las longitudes si se midieran con la tira amarilla?

____

c) ¿Y para la tira verde? ____________________________________

____

d) ¿Y con la azul? ______________________________________

____

e) Si la unidad de medida es una tira que mide la sexta parte de la tira roja, ¿cómo calcularías las medidas de las tiras A, B, C, D, E y F? ________________

____

f) ¿Cuánto medirían las tiras A, B, C, D, E y F si se usa como unidad de medida una tira que mide el doble de lo que mide la roja? ________________

Compara tus resultados con los de tus compañeros; si no coinciden, verifiquen por qué. Si es necesario, corten tiras como la amarilla, la verde y la azul, y midan las tiras A, B, C, D, E y F. Comenten la información del recuadro y den ejemplos de lo que ahí se menciona.

Si la unidad de medida A es *n* veces mayor que la unidad B, las medidas que se obtienen con A son *n* veces menores de las que se obtienen con B. Es decir, la medida que se obtiene es inversamente proporcional al tamaño de la unidad.

DESCUBRO MÁS

Se comparan las medidas de dos longitudes, A y B, expresadas en metros, y resulta que están en razón 2 a 1, es decir, A mide lo doble que B.
Si las medidas se expresan en centímetros, ¿qué razón habrá entre las medidas de A y B? ¿También será 2 a 1?

Lección 49. De una unidad menor a una mayor

1. Considera como unidad de medida la tira amarilla de la lección anterior.

a) Vuelve a anotar las longitudes si se mide con la tira amarilla.

Longitud de las tiras si se considera la tira amarilla como unidad de medida						
Tira	A	B	C	D	E	F
Longitud						

b) Considera ahora las siguientes unidades.

Esta tira es dos veces la tira amarilla

Esta tira es cuatro veces la tira amarilla

Esta tira es tres veces la tira amarilla

Sin medir, calcula y anota la medida de las tiras de la lección anterior para cada unidad de medida. Puedes usar calculadora.

MÁS IDEAS
Muchas veces es más práctico usar fracciones en lugar de notación decimal para expresar una medida. Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ m en lugar de 0.333... m.

		Longitud de la tira					
		A	B	C	D	E	F
Unidad de medida	Tira roja						
	Tira lila						
	Tira naranja						

2. Responde las preguntas.

a) ¿Cómo calculaste los resultados de medir con la tira roja? ____________________

____

b) ¿Y para la tira lila? ____

____

c) ¿Y con la tira naranja? ____

____

d) Si la unidad de medida es una tira 8 veces más larga que la amarilla, ¿cómo calcularías las medidas de las tiras A, B, C, D, E y F? ______________________

____

____

Compara tus resultados con los de tus compañeros. Si no coinciden, verifiquen por qué (pueden copiar y recortar tiras para medir). Con ayuda del profesor, comenten la información del recuadro y den ejemplos concretos de lo que ahí se menciona.

Si la unidad de medida A es *n* veces menor que la unidad B, las medidas que se obtienen si se mide con A son *n* veces mayores de las que se obtienen al medir con B. Es decir, las medidas que se obtienen son inversamente proporcionales a los tamaños de las unidades.

MÁS IDEAS
Comparar físicamente dos unidades de medida (por ejemplo, poniendo copias de una encima de la otra) es un buen recurso para darse idea de sus tamaños relativos (cuántas veces es más grande una que la otra).

3. Resuelve los problemas.

a) Luisa midió el largo del escritorio con una vara y Fernando, con un lápiz. El resultado de Luisa fue 2 varas y el de Fernando, 10 lápices.

¿Cuál es la relación entre la longitud de la vara y la del lápiz? ______________

____

____

b) La tira X es 10 veces más larga que la tira Y. El largo de un pasillo mide 12 tiras X.

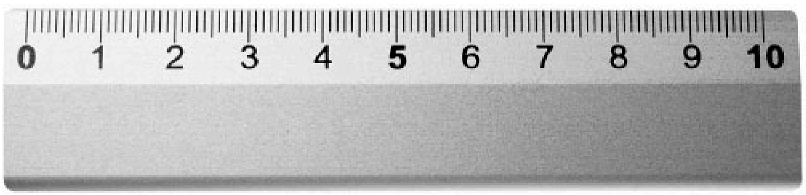
¿Cuál será la longitud del pasillo si se mide con la tira Y? ________________

¿Cómo calculaste la longitud? ______________________________

c) El milímetro (mm) es 10 veces menor que el centímetro (cm).

Si un listón mide 65 mm, ¿cuántos centímetros mide? ________________

d) La imagen que se muestra corresponde a una regla de 10 cm. Verifica tu respuesta del inciso anterior marcando en la regla la medida del listón.



Lección 50. La medida de un lápiz

decímetro (dm): décima parte de un metro.

$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m}$

centímetro (cm): centésima parte de un metro.

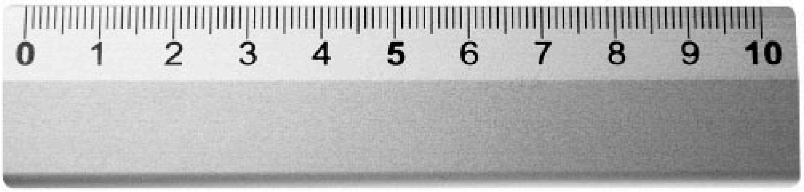
$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$

milímetro (mm): milésima parte de un metro.

$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m}$

1. Analiza la información y responde.

La imagen corresponde a una regla que mide 1 decímetro.



¿Cuántos centímetros mide? ______ ¿Y cuántos milímetros? ______

2. Anota "mm", "cm" y "dm" donde corresponda para hacer verdaderas las igualdades.

a) 160 ______ = 1.6 ______ = 16 ______ **b)** 1.5 ______ = 15 ______ = 0.15 ______

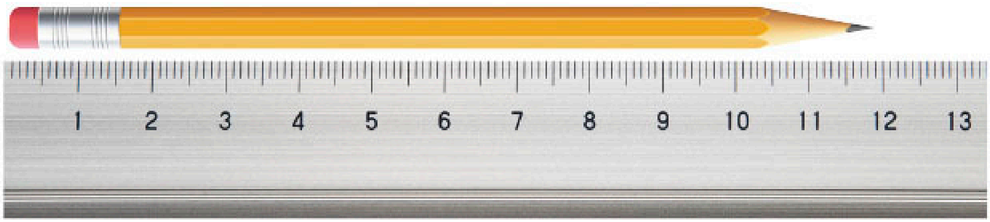
3. Mide con tu regla el largo de los lápices que se muestran. Anota, debajo de cada uno, su medida en decímetros, centímetros y milímetros.

______ dm	______ dm	______ dm	______ dm
______ cm	______ cm	______ cm	______ cm
______ mm	______ mm	______ mm	______ mm

4. Responde con base en las imágenes. Los números en las reglas indican centímetros.

a) ¿Cuánto mide este lápiz? _____ dm = _____ cm = _____ mm

b) ¿Y este otro? _____ dm = _____ cm = _____ mm



c) ¿Cómo se convierten decímetros en centímetros? ____________________

¿Por qué? ____________________

d) ¿Y milímetros en centímetros? ____________________

¿Por qué? ____________________

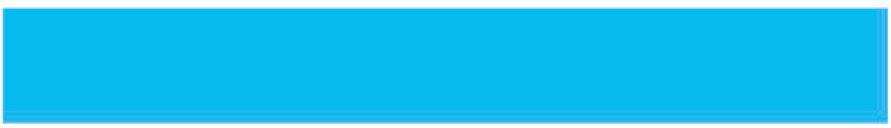
e) ¿Y para convertir decímetros en milímetros? ____________________

¿Por qué? ____________________

MÁS IDEAS

- Para multiplicar un número con punto decimal por 10, 100, o 1 000, se recorre a la derecha el punto uno, dos o tres lugares.
- Para dividir un número con punto decimal entre 10, 100, o 1 000, se recorre a la izquierda el punto uno, dos o tres lugares.

5. Completa las igualdades que indican la longitud de cada tira.



a) Longitud: 1.17 dm = _____ cm = _____ mm

b) Longitud: _____ dm = 6.8 cm = _____ mm

Valida tus respuestas con tus compañeros. Formulen, de manera grupal, métodos para hacer conversiones entre decímetros, centímetros y milímetros. Anoten los métodos en su cuaderno y ejemplifíquenlos con números concretos.

MÁS IDEAS

En la siguiente lección tú y un compañero trabajarán con un metro de listón. Pónganse de acuerdo para decidir quién traerá el material (se consigue en mercerías o tiendas de telas).

Lección 51. Metro y decámetro

1. Trabaja con un compañero. Al final de la lección anterior se pidió que trajeran un metro de listón.

   a) Usen su regla para dividir el metro de listón en decímetros. Marquen con lápiz cada decímetro.

   ¿En cuántos decímetros quedó dividido el metro? ______________________

   b) Marquen, en el primer decímetro, los centímetros.

   - ¿En cuántos decímetros quedó dividido el metro? ____________________
   - Si marcaran todos los centímetros en el metro, ¿cuántos serían? ________
   - ¿Y si se marcaran todos los milímetros en el metro? __________________

DESCUBRO MÁS

Si un metro equivale a 100 centímetros, ¿entonces un centímetro es $\frac{1}{100}$ de metro? ¿Qué parte del metro es el milímetro?

2. Elijan cuatro longitudes que midan más de un metro; por ejemplo, el ancho del salón, la altura de alguno de ustedes o el largo del pizarrón.

   a) Completen la tabla. Anoten qué longitudes eligieron y, sin medirlas aún, estimen cuánto miden en metros.

Longitud elegida	¿Cuánto estiman que mide en metros?
1.	
2.	
3.	
4.	

   b) Utilicen su metro de listón para medir las longitudes que eligieron. Expresen los resultados en las unidades que se indican.

Longitud	Medida en metros	Medida en decímetros	Medida en centímetros	Medida en milímetros
1				
2				
3				
4				

   c) Comenten si sus estimaciones iniciales se acercan a las medidas reales. Si no es así, expliquen qué provocó que sus estimaciones no fueran buenas.

   ____

   ____

   ____

3. Completen el texto.

Como un metro equivale a 1 000 milímetros, entonces…

a) para convertir metros en milímetros, se ____________________

Ejemplo: ____________________

b) para convertir milímetros en metros, se ____________________

Ejemplo: ____________________

4. Salgan al patio de la escuela y midan, sobre el piso y con su metro de listón, una longitud de 10 m; marquen con gis o coloquen objetos sobre el piso para delimitarla. La longitud que marcaron en el piso es un decámetro: 1 dam = 10 m.

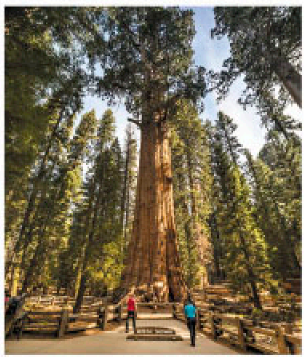
a) Piensen en algunos objetos reales que midan más de 1 dam, pero menos de 10 dam. Anótenlos. ____________________

____

b) Escriban, en su cuaderno, ejemplos de longitudes o distancias con las siguientes características: que midan menos de un metro; más de un metro, pero menos de un decámetro; y más de 10 decámetros.

5. Las imágenes corresponden a dos árboles famosos. Uno de ellos está entre los más altos del mundo; el otro, entre los más anchos. Anota las medidas que faltan.

Nombre: Árbol del Tule
Especie: Ahuehuete
Ubicación: Oaxaca, México
Diámetro: ____ dam = ____ m = 143 dm



Nombre: General Sherman
Especie: Secuoya Gigante
Ubicación: California, Estados Unidos de América
Altura: 8.4 dam = ____ m = ____ dm

Compara tus respuestas de las actividades 4 y 5 con las de tus compañeros. Establezcan y anoten en su cuaderno reglas para convertir decámetros en cada una de las unidades menores que trabajaron en esta lección, y otras para pasar de las unidades menores a decámetros. Ejemplifiquen sus reglas con números concretos.

MÁS IDEAS

¿Por cuánto se debe multiplicar una medida para pasar de centímetros a metros? ¿Entre cuánto hay que dividir la medida original?

delimitar: determinar los límites de algo; por ejemplo, dónde comienza y dónde termina una longitud dada.

DESCUBRO MÁS

¿Cuánto mide la circunferencia del Árbol del Tule? ¿Cuántas personas tomadas de las manos estimas que se requieren para rodearlo por completo?

Lección 52. Carreras

1. Trabaja en equipo. Lean la siguiente noticia y respondan.

DAFNE SCHIPPERS REINA EN EL DOBLE HECTÓMETRO
12 DE AGOSTO, 2017

La holandesa Dafne Schippers consiguió su mejor marca de la temporada al recorrer el doble hectómetro en tan solo 22.05 segundos. Con ello renovó su título de campeona mundial de los 200 metros.

Fuente: nocorrasvuela.com/dafne-schippers-doble-hectometro

a) De acuerdo con el texto, ¿cuántos metros mide un hectómetro (1 hm)?

____

b) ¿Cuántas veces tendrían que caminar alrededor del patio de la escuela para completar un hectómetro? ______________________________

2. La tabla muestra algunos récords mundiales masculinos en carreras.

Prueba	Marca	Atleta
100 m	9.58 s	Usain Bolt (JAM)
200 m	19.19 s	Usain Bolt (JAM)
400 m	43.03 s	Wayde Van Niekerk (RSA)
800 m	1 min 40.91 s	David Rudisha (KEN)
1 000 m	2 min 11.96 s	Noah Ngeny (KEN)
1 500 m	3 min 26.00 s	Hicham El Guerrouj (MAR)
5 000 m	12 min 37.35 s	Kenenisa Bekele (ETH)
10 000 m	26 min 17.53 s	Kenenisa Bekele (ETH)
20 000 m	56 min 26.00 s	Haile Gebrselassie (ETH)
100 km	6 h 13 min 33 s	Takahiro Sunada (JPN)

Fuente: www.iaaf.org/records/by-category/world-records

Anota el apellido del atleta que tiene cada récord.

Prueba	Apellido del atleta
10 km	
8 hm	
100 000 m	
4 hm	
1.5 km	
10 dam	

TIC MÁS Investiga en internet qué lugares están a 1 km, 2 km y 3 km de tu escuela; por ejemplo, mediante algún sitio con mapas satelitales. Usa la información recabada para hacer en cartulina un croquis a escala de los alrededores de tu colegio; por ejemplo, que cada decímetro del croquis corresponda a un kilómetro del mundo real.

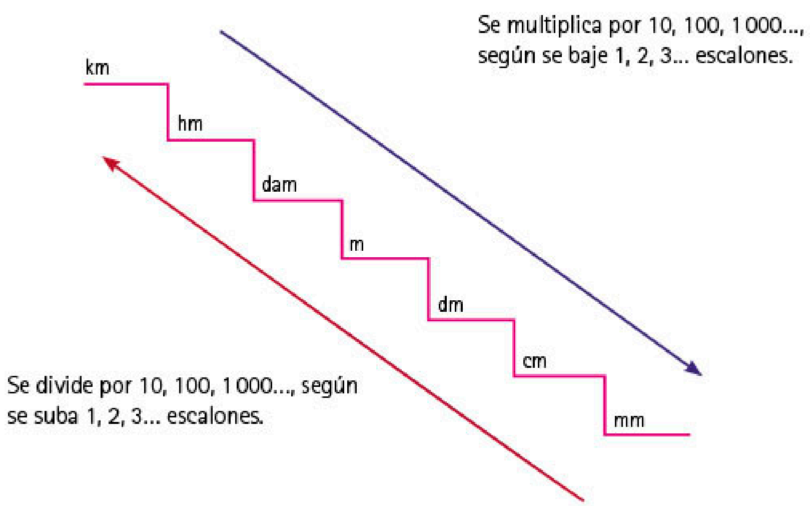
Valida en grupo tus respuestas. Establezcan y anoten una regla general para convertir medidas de longitud: de unidades mayores a otras menores y de unidades menores a otras mayores. Ejemplifiquen con las unidades que trabajaron en esta secuencia (kilómetro, hectómetro, decámetro, metro, decímetro, centímetro y milímetro).

Taller de matemáticas

1. Completa la tabla. Expresa cada distancia en las unidades que se indican.

Distancia en...				
metros	decámetros	kilómetros	decímetros	hectómetros
100 m				
		0.4 km		
			10 000 dm	
	150 dam			
				200 hm
		25 km		
30 000 m				

2. El diagrama que se muestra se llama "Escalera de las conversiones" y sirve, como su nombre lo indica, para hacer conversiones de una unidad a otra.



Usa el diagrama para hacer las siguientes conversiones.

- 8 km = _______ dm
- 500 mm = _______ dm
- 60 m = _______ cm
- 100 dm = _______ hm
- 2 hm = _______ km
- 7.5 dam = _______ dm

TIC MÁS Abre un archivo de hoja de cálculo y anota, en una de las columnas, las medidas en metros de la actividad 1. Después, investiga cómo usar la herramienta para multiplicar o dividir todos los números de la columna por 10, 100 o 1 000 y así validar tus respuestas de esta actividad.

SECUENCIA 18

Perímetro y área II

Lección 53. Aproximaciones al área del círculo

Aprendizaje esperado: calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

1. Trabaja en pareja. Planeen una manera para calcular el área del círculo que se muestra (figura 1), pero sin usar ninguna fórmula.

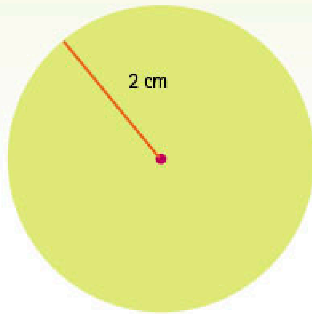
Escriban su plan. ______________________

____

____

____

Figura 1



2. Respondan con base en la figura 2.

a) ¿Cuál es el área del cuadrado?

____

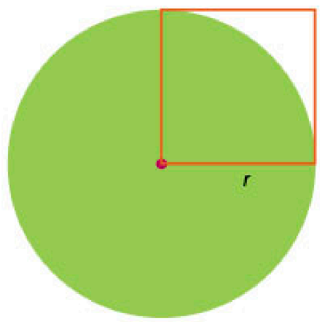
b) ¿El área del círculo es mayor, menor o igual que el área de cuatro de esos cuadrados?

____

c) ¿El área del círculo es mayor, menor o igual que el área de dos de esos cuadrados?

____

Figura 2



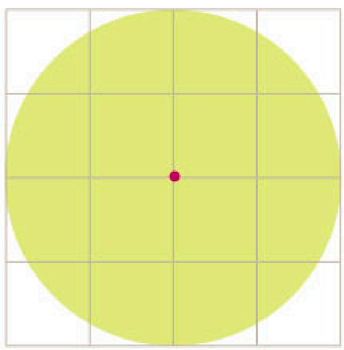
DESCUBRO MÁS
¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado mide $2r$?

d) Subrayen la expresión que se acerca más al área del círculo.

- $2 \times r \times r = 2r^2$
- $3 \times r \times r = 3r^2$
- $4 \times r \times r = 4r^2$

3. Respondan con base en la figura y sus respuestas de la actividad 2.

Anoten la medida del radio del círculo que se muestra; consideren como unidad de medida de longitud el lado de un cuadrito de la cuadrícula.



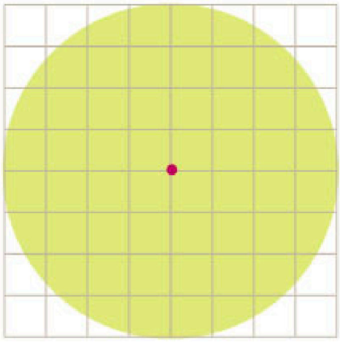
a) Radio del círculo = ____ unidades.

b) Subrayen la expresión con la que se puede aproximar el área del círculo anterior.

- $A \approx 2 \times 2 = 4$
- $A \approx 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $A \approx 3 \times 2 = 6$
- $A \approx 3 \times 2 \times 2 = 12$

MÁS IDEAS
El símbolo ≈ se lee "aproximadamente" o "casi igual"; por ejemplo, la expresión $\frac{7}{9} \approx 0.78$ se lee "siete novenos es aproximadamente cero punto setenta y ocho" o "siete novenos es casi igual a cero punto setenta y ocho".

4. Anoten la medida del radio del círculo y subrayen la expresión para calcular el área aproximada. De nuevo, la unidad de medida de longitud es el lado de un cuadrito de la cuadrícula.



Radio del círculo = ____ unidades.

Área aproximada:

- $A \approx 2 \times 4 = 8$
- $A \approx 2 \times 4 \times 4 = 32$
- $A \approx 3 \times 4 = 12$
- $A \approx 3 \times 4 \times 4 = 48$
- $A \approx 4 \times 4 = 16$
- $A \approx 4 \times 4 \times 4 = 64$

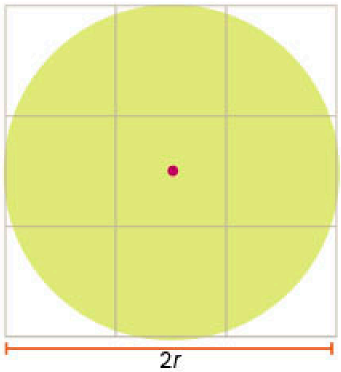
Validen con sus compañeros sus resultados de las actividades 3 y 4. Si aún no lo han hecho, comprueben las respuestas contando los cuadritos que quedan dentro de cada círculo. Consideren que el círculo no abarca algunos cuadritos en su totalidad y hay que compensar.

Comenten por qué los resultados que encontraron son aproximaciones y expliquen, en su cuaderno y de manera grupal, cómo se calcula el área aproximada de un círculo si se conoce la medida de su radio.

MÁS IDEAS

Otra opción para hallar el área aproximada del círculo es restar al área de la cuadrícula completa los cuadritos que no son parte del círculo.

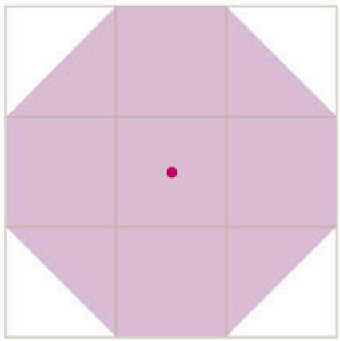
5. Trabaja con un compañero. Consideren las figuras para responder.



a) El lado del cuadrado mide dos veces el radio del círculo, es decir, mide $2r$.

Si se considera esta medida para el lado, ¿cuál es el área del cuadrado?

____



b) El círculo y el octágono ocupan una parte muy similar del cuadrado grande. Basándose en esto, ¿aproximadamente qué fracción del cuadrado abarca el círculo?

____

____

c) Con base en las respuestas anteriores, formulen una expresión para calcular el área del círculo a partir de la medida de su radio.

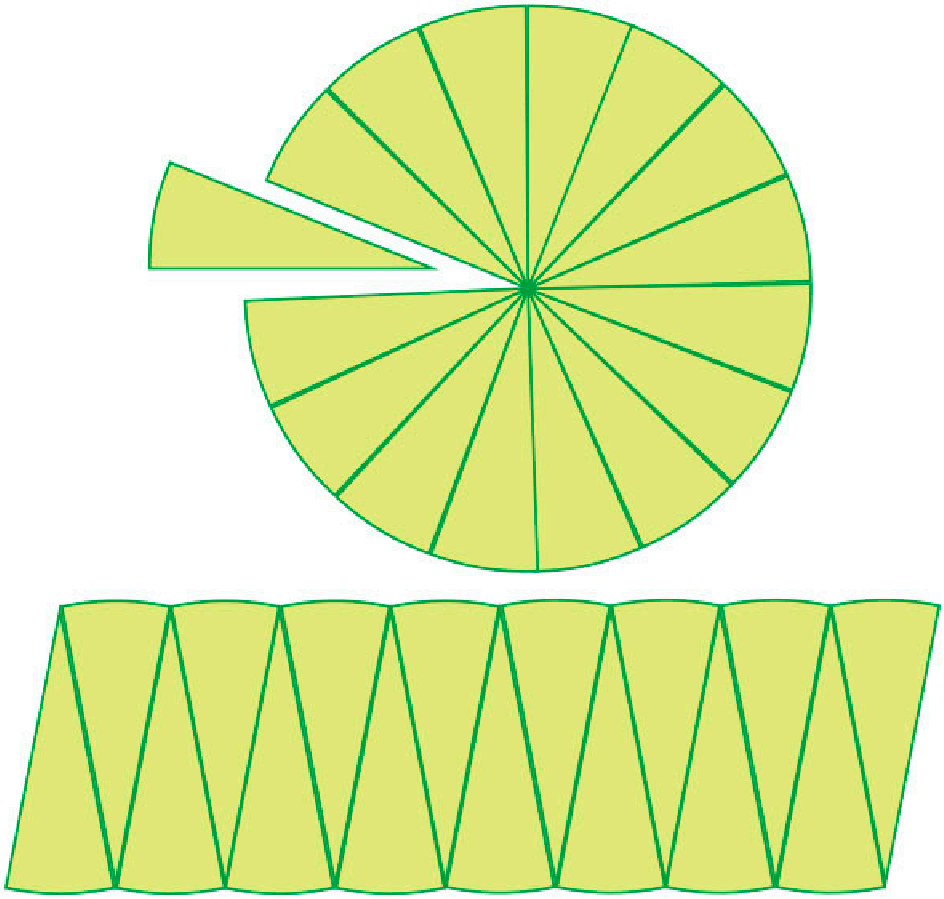
____

Validen sus respuestas con otra pareja de compañeros. Comenten acerca de la expresión que formularon y compárenla con su plan en la actividad 1.

Lección 54. ¿Cómo se obtiene la fórmula del área?

1. Trabaja con un compañero. Analicen la información y respondan.

Un círculo de 20 cm de diámetro se divide en 16 sectores iguales y estos se colocan en un arreglo como el que se muestra.



a) ¿A qué figura geométrica se parece el arreglo? ______________________

b) Formulen una expresión para calcular el área del círculo de acuerdo con el arreglo anterior (sin usar la fórmula del área del círculo).

Área del círculo = ______________________

c) Describan, en su cuaderno, cómo encontraron la expresión que anotaron en el inciso anterior.

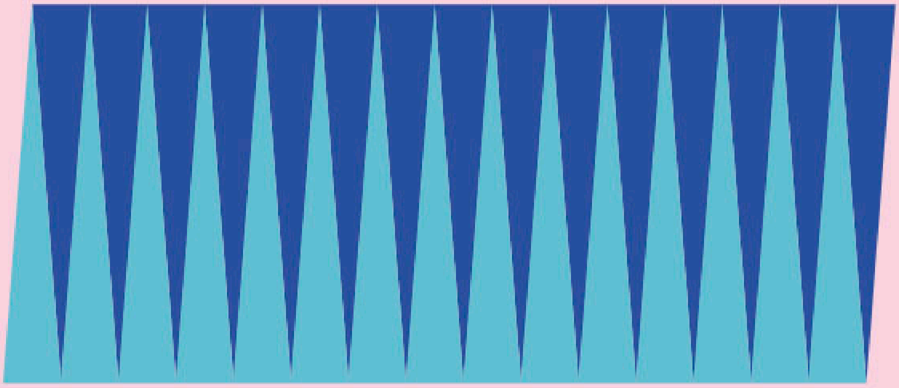
DESCUBRO MÁS

Si en vez de 16 rebanadas, el círculo se partiera en 32, en 64 y en 128 sectores, ¿a qué figura se parecería cada vez más el arreglo?

Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.

- Comenten cómo calcularon el área del círculo.
- Lean y comenten, con ayuda del profesor, el procedimiento del recuadro para obtener la fórmula del área del círculo.

- Si partimos el círculo en sectores cada vez más pequeños, el arreglo se parecerá cada vez más a un rectángulo.



- Entonces, el área del círculo es aproximadamente igual al área del rectángulo, que se calcula multiplicando base por altura.

- La base del rectángulo es la mitad del perímetro del círculo y su altura es el radio del círculo. Por tanto...

$$\text{área del círculo} = \frac{\text{perímetro}}{2} \times r.$$

- El perímetro del círculo es $\pi \times$ diámetro, entonces...

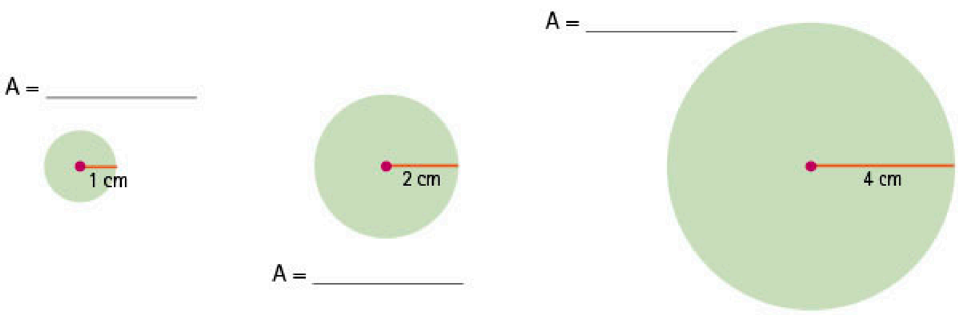
$$\text{área del círculo} = \frac{\pi \times d}{2} \times r = \pi \times \frac{d}{2} \times r.$$

- Dado que la mitad del diámetro es el radio...

$$\text{área del círculo} = \pi \times r \times r = \pi \times r^2 = \pi r^2.$$

- Es decir, el área de un círculo es igual al producto de π (que vale aproximadamente 3.14) por el cuadrado de la medida del radio.

2. Usa la fórmula anterior para calcular el área de los círculos y responde.



a) ¿El área de un círculo es directamente proporcional a la medida de su radio?

____

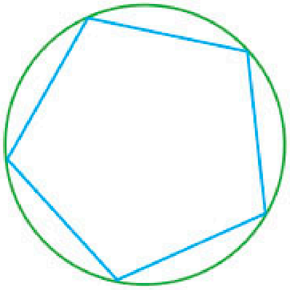
b) ¿Por qué? ____

____

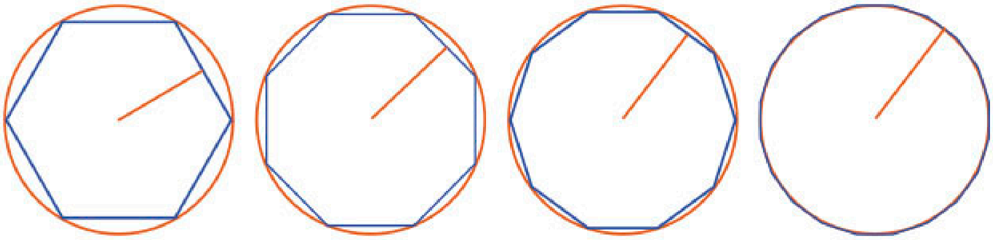
MÁS IDEAS
Cuando dos cantidades cambian de manera proporcional, ambas aumentan o disminuyen de la misma manera.

Lección 55. Los polígonos regulares y el círculo

polígono inscrito en una circunferencia: aquel que está contenido dentro del círculo y cuyos vértices tocan a la circunferencia (sin cruzarla).



1. Trabaja en equipo. Consideren que los cuatro círculos tienen igual perímetro y observen cómo varían los polígonos regulares inscritos.



Anoten, junto a cada afirmación, V o F para indicar si es verdadera o falsa.

a) Los cuatro polígonos anteriores tienen igual perímetro. _____

b) Si aumenta el número de lados, aumenta el área del polígono. _____

c) Por muchos lados que tenga el polígono, su área nunca será mayor que la del círculo. _____

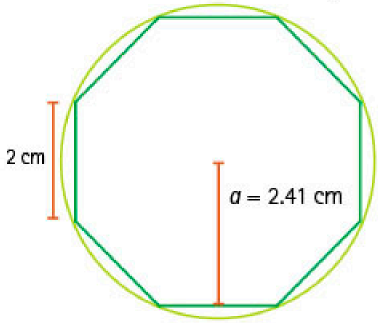
d) Todas las apotemas de los polígonos miden lo mismo. _____

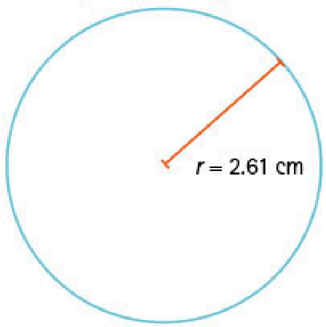
e) Por muchos lados que tenga el polígono, ninguna apotema puede medir más que el radio del círculo. _____

DESCUBRO MÁS

¿Qué mide más: el radio de una circunferencia o la apotema de un polígono regular inscrito en ella? ¿Sucedería lo mismo si el círculo estuviera inscrito en el polígono?

2. Calculen el área del octágono y del círculo; consideren que ambas circunferencias son del mismo tamaño. Después, contesten y hagan lo que se indica.





Área $= \frac{perímetro \times apotema}{2} = \frac{pa}{2}$

Área $= \frac{perímetro \times radio}{2} = \frac{\pi \times d \times r}{2}$

Área = ____________________ Área = ____________________

a) ¿En qué se parece la fórmula del área del círculo con la de los polígonos regulares? ____

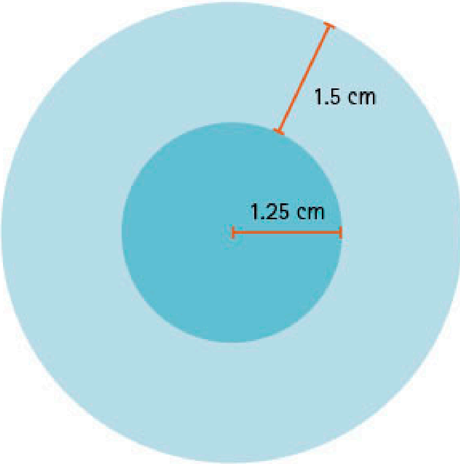
____

b) Verifiquen que $\frac{\pi \times d \times r}{2} = \pi r^2$.

Validen en grupo y con ayuda del profesor sus resultados de las actividades 1 y 2. Para la actividad 1, comenten si notaron que entre más lados tiene el polígono, su área se parece más a la del círculo. Para la actividad 2, expliquen cómo comprobaron que $\frac{\pi \times d \times r}{2} = \pi r^2$.

3. Resuelve los problemas. Anota las operaciones.

a) En la figura, ¿cuál es el área de la región celeste?

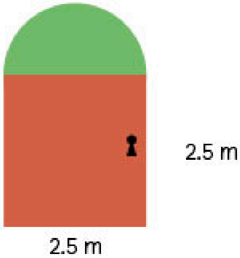


b) En una pizzería hacen pizzas de dos tamaños.

- La pizza chica mide 25 cm de diámetro. ¿Cuál es su área?
- La pizza grande tiene el doble de área que la chica. ¿Cuánto mide su diámetro?

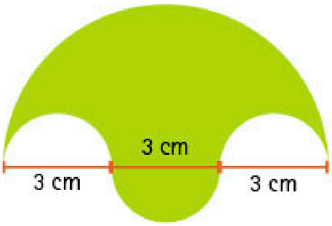
c) Una puerta tiene las medidas que se muestran .

¿Cuál es el área de la puerta?



d) La figura está hecha solo con semicírculos.

¿Cuál es su área?



Valida tus respuestas con tus compañeros. En caso de que no coincidan, identifiquen los errores y corrijan.

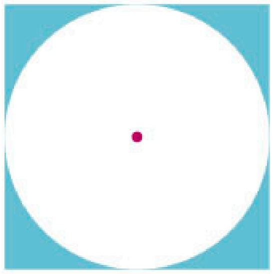
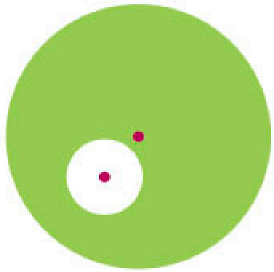
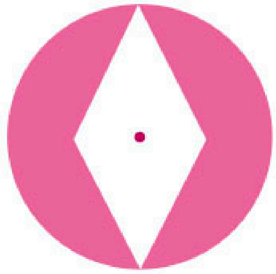
DESCUBRO MÁS

Si el área de un círculo es πr^2, ¿cuál es el área de un semicírculo?

Lección 56. Círculos, circunferencias y otras figuras

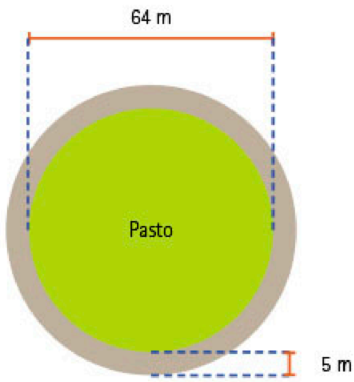
DESCUBRO MÁS
¿Cuál sería el área sombreada si el círculo pequeño tuviera el mismo centro que el grande?

1. Calcula el área coloreada en cada figura. Toma las medidas necesarias. Puedes usar calculadora.

Área = ______________ Área = ______________ Área = ______________

2. Considera esta pista circular para correr.



   a) Al dar una vuelta, ¿cuánto menos de distancia recorre alguien que va junto al pasto en comparación con alguien que va cerca de la parte exterior de la pista?

   ____

   b) Explica cómo lo calculaste.

   ____

   ____

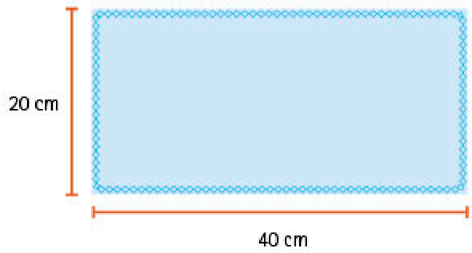
Taller de matemáticas

1. Doña Luisa hace manteles individuales de tela y les pone listón en el contorno. Calcula, en cada caso, la cantidad mínima de tela y de listón que utiliza para cada tipo de mantel. Puedes usar calculadora.

a)

- Tela: ______________
- Listón: ______________

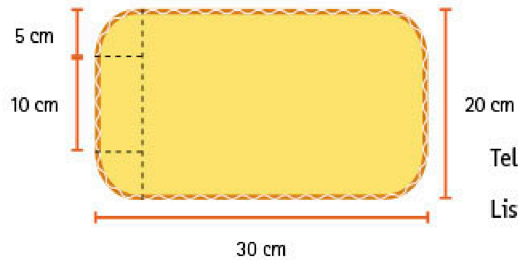
b)



Tela: ____________ cm^2

Listón: ____________ cm

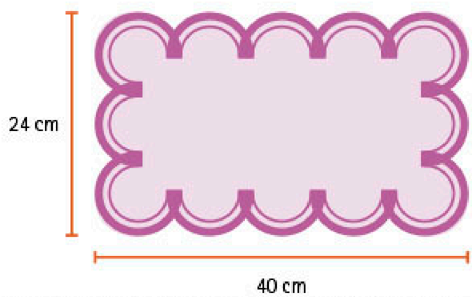
c)



Tela: ____________ cm^2

Listón: ____________ cm

d)



Tela: ____________ cm^2

Listón: ____________ cm

MÁS IDEAS

Los bordes del mantel del inciso d) son arcos de circunferencia; algunos de esos arcos miden la mitad de una circunferencia completa.

2. Responde y haz lo que se pide respecto a los manteles de la actividad anterior.

a) ¿En qué mantel se usa más tela? ____

b) ¿En cuál se emplea más listón? ____

c) Explica cómo calculaste la cantidad de tela y de listón para el último mantel.

____

____

____

____

____

____

____

TIC MÁS Calcula áreas y perímetros en www.redir.mx/SCMM2-123a.

SECUENCIA 19

Volumen de prismas I

Lección 57. Prismas con base poligonal

Aprendizaje esperado: calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

DESCUBRO MÁS
En primer grado aprendiste cómo calcular el volumen de un prisma recto con base triangular o cuadrangular. Comenta con el resto del grupo si se puede usar un método similar cuando la base del prisma tiene otra forma (por ejemplo, hexagonal).

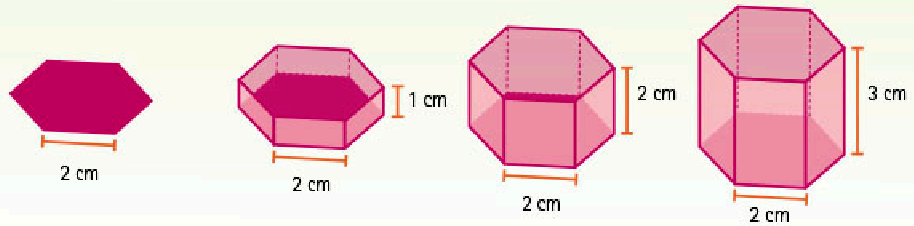
MÁS IDEAS
Para economizar la escritura, se escribe V_B en lugar de anotar "Volumen del prisma B".

apotema: distancia del centro de un polígono regular al punto medio de cualquier lado.

apilar: colocar una cosa sobre otra.

1. Trabaja en equipo. Respondan con base en las figuras.

A B C D



a) La figura A es un hexágono regular. Su apotema mide 1.73 cm. ¿Cuál es su área? ____________________

b) Las bases de los prismas B, C y D miden lo mismo que la figura A. Calculen el volumen de cada prisma.

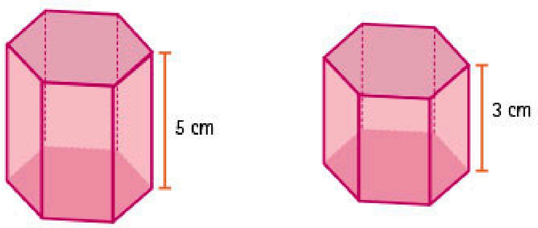
V_B = __________ V_C = __________ V_D = __________

c) Un prisma E tiene la misma base que los anteriores y un volumen de 83.04 cm³. ¿Cuánto mide su altura? ____________________

d) Un prisma F se formó apilando los prismas B, C, D y E. ¿Cuánto mide su altura? __________ ¿Cuál es su volumen? ____________________

2. Analicen la información y respondan o hagan lo que se pide.

G H I



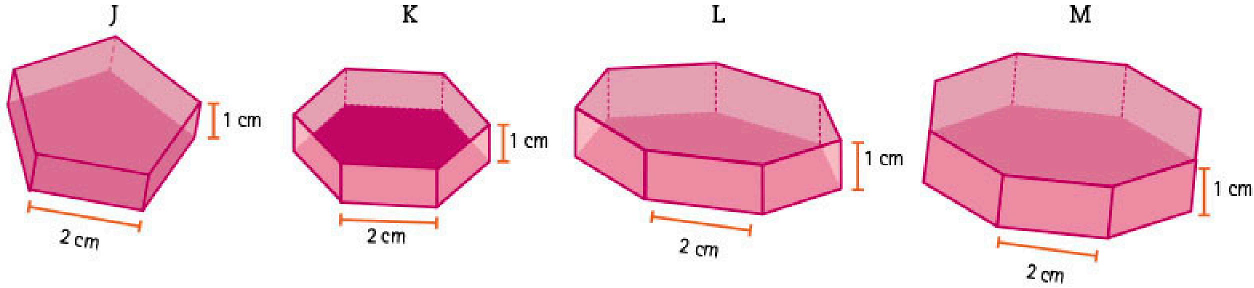
a) Los prismas G y H tienen las mismas bases. Si el volumen de G es 200 cm³, ¿cuál es el volumen de H? __________

b) Tracen, a la derecha de H, el prisma I con la misma base, pero con altura de 1 cm. ¿Cuál es su volumen? __________

Validen, en el grupo y con ayuda del profesor, sus respuestas de las actividades 1 y 2. Expliquen por qué, cuando la base se mantiene fija, la altura y el volumen de un prisma son directamente proporcionales.

3. Analiza la información y responde o haz lo que se pide.

Las bases de los prismas J, K, L y M son polígonos regulares. La longitud del lado de la base no varía entre un prisma y otro, y todos los prismas tienen la misma altura.



a) Completa la tabla.

Figura	Nombre	Perímetro de la base	Apotema	Área de la base	Volumen
J	Prisma pentagonal			7 cm^2	
K		12 cm	1.7 cm		
L					14.7 cm^3
M				19.2 cm^2	

b) ¿Cuál sería el volumen del prisma J si su altura fuera 4.5 cm? ______________

c) ¿Cuál sería el volumen del prisma K si su altura fuera 0.5 cm? ______________

d) ¿En qué son diferentes los resultados de la quinta y sexta columna de la tabla?

____

____

MÁS IDEAS

Algunas unidades de medida de longitud son el centímetro (cm), el metro (m) y el kilómetro (km).
Son unidades de área el centímetro cuadrado (cm^2), el metro cuadrado (m^2) y el kilómetro cuadrado (km^2).
Son unidades de medida de volumen el centímetro cúbico (cm^3) y el metro cúbico (m^3).

Por ejemplo,
cm (longitud),
$cm \times cm = cm^2$ (área),
$cm \times cm^2 = cm^3$ (volumen).

4. Imagina un prisma recto como los de la actividad anterior (el lado de la base mide 2 cm y la altura, 1 cm) cuya base es un polígono regular de nueve lados (nonágono).

a) ¿Cuánto mediría su apotema, aproximadamente? ______________

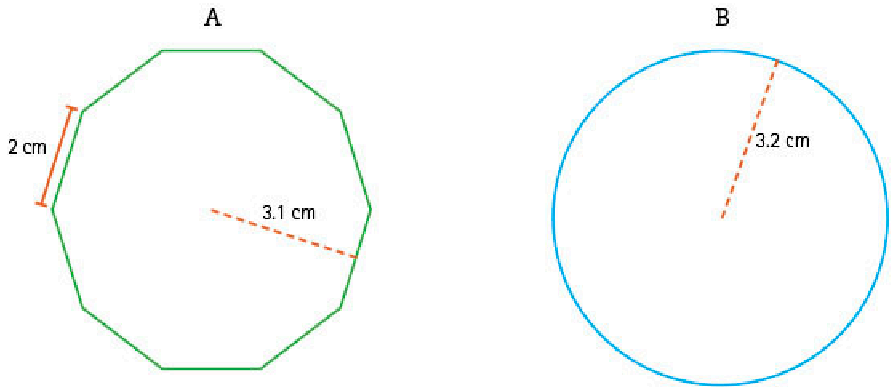
b) ¿Cuánto mediría el área de la base? ______________

c) ¿Cuál sería su volumen? ______________

Valida tus respuestas con el resto del grupo. Comenten por qué el área se mide en centímetros cuadrados (cm^2), mientras que en el caso del volumen se usan centímetros cúbicos (cm^3). Anoten, en el cuaderno, sus conclusiones.

Lección 58. El volumen del cilindro

1. Trabaja en equipo. El polígono regular A y el círculo B tienen aproximadamente el mismo perímetro.



a) Sin hacer cálculos, ¿cuál de las dos figuras piensan que tiene mayor área?

____

b) Calculen las siguientes medidas. Consideren 3.14 como valor de π.

- Perímetro de A = __________
- Perímetro de B = __________
- Área de A = __________
- Área de B = __________

2. Analicen la información y respondan.

cilindro: cuerpo sólido delimitado por una superficie curva y dos superficies planas paralelas (que son círculos).

El cuerpo C es un prisma recto, mientras que D es un cilindro. Ambos cuerpos miden 1 cm de altura.

La base de C corresponde a la figura A de la actividad anterior; la base de D, a la figura B.

a) ¿Cuál de los dos cuerpos tiene mayor volumen: C o D? ____________________

b) ¿Cuál sería el volumen de C si su altura fuera 10 cm? ____________________

c) ¿Cuál sería el volumen de D si su altura fuera 10 cm? ____________________

DESCUBRO MÁS
¿Cuál es el volumen de un cilindro cuyo radio de la base mide 1 cm y cuya altura es de 1 cm?

Con ayuda del profesor, validen sus resultados, identifiquen posibles errores y corrijan lo necesario. Después, comenten la información del recuadro.

Para calcular el volumen de un cilindro se usa el mismo procedimiento que para los prismas: se multiplica el área de la base por la altura. Dado que la base del cilindro es un círculo, la fórmula es $V = \pi r^2 h$.

3. Analiza la información y responde. Considera $\pi = 3.14$. Puedes usar calculadora.

En la fórmula del volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, intervienen tres medidas que pueden cambiar y un valor constante.

a) ¿Cuál es el valor constante? ______

b) Además del valor de π, ¿qué medidas se necesitan para calcular el volumen de un cilindro? ____________________

c) Un envase cilíndrico mide 8 cm de diámetro en la base y 12 cm de altura. ¿Cuál es su volumen? ____________________

d) El volumen de otro envase cilíndrico es 197.82 cm^3 y el radio de la base mide 3 cm. ¿Cuánto mide su altura? ____________________

e) Otro envase cilíndrico tiene 196.25 cm^3 de volumen y su altura mide 10 cm. ¿Cuánto mide el radio de la base? ____________________

f) Manipula la fórmula para el volumen del cilindro, $V = \pi r^2 h$, hasta obtener fórmulas para la altura (h), el radio al cuadrado (r^2) y el radio (r).

- $h =$ ________
- $r^2 =$ ________
- $r =$ ________

4. Responde las preguntas.

a) ¿Cómo cambia el volumen de un cilindro si el radio de su base se duplica?

____

b) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica? ____________________

c) ¿Cómo cambia el volumen si la altura se duplica y el radio de la base se divide entre 2? ____________________

d) El volumen de un cilindro es 3.14 cm^3. ¿Cuánto pueden medir el radio de la base y la altura del prisma? Anota dos soluciones distintas.

____

Valida, en el grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas. Comenten por qué si se conoce el diámetro y la altura de un cilindro se puede calcular su volumen. Den ejemplos para mostrar que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

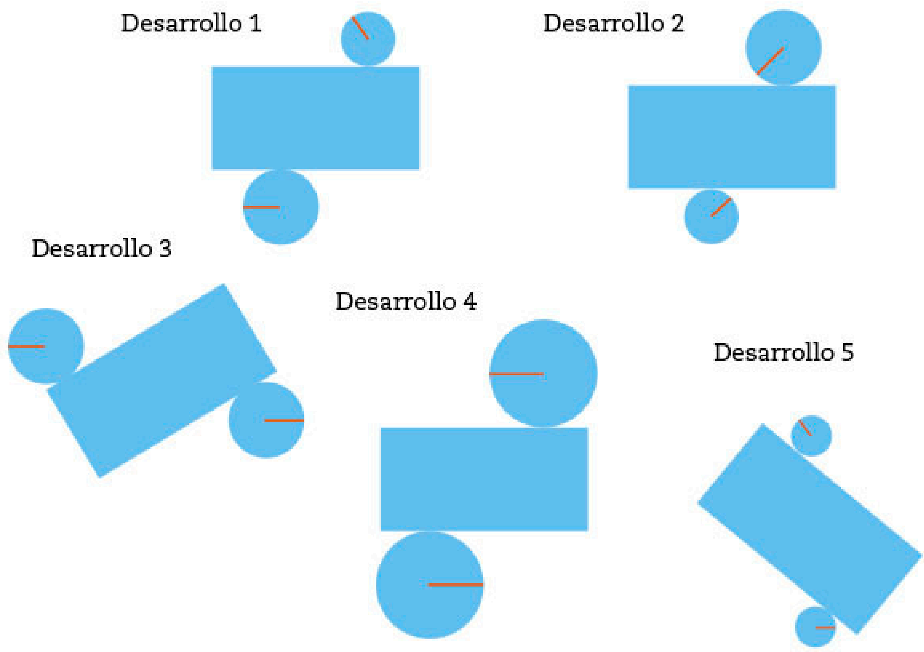
MÁS IDEAS

En una igualdad matemática se vale hacer la misma operación en ambos lados para obtener una nueva igualdad equivalente a la original; por ejemplo, para la expresión $A = bh$, si dividimos ambos lados de la igualdad entre h obtenemos $\frac{A}{h} = b$.

Lección 59. ¿Cómo se construye un cilindro?

desarrollo plano: conjunto de figuras planas que al pegarlas forman un cuerpo geométrico; por ejemplo, el desarrollo plano de un cilindro consta de dos círculos (tapas del cilindro) y un rectángulo (cara lateral del cilindro).

1. Marca con una ✔ el desarrollo plano con el que se forma un cilindro, sin que sobre o falte papel. Después, contesta las preguntas.



a) ¿Qué medidas tendrá el cilindro cuando se arme?

- Radio de la base = _____ cm
- Altura = _____ cm

b) ¿Cuál será su volumen? _____ cm^3

2. Lleva a cabo lo siguiente. Considera 3.14 como valor de π.

a) Traza, en una hoja de papel, la plantilla (desarrollo plano) para construir un cilindro con las siguientes medidas.

- Altura del cilindro: 6 cm
- Perímetro de la base (círculo): 15 cm

b) Antes de recortar la plantilla y armar el cilindro, traza tres o cuatro "pestañas" junto a cada circunferencia para pegar el cuerpo.

c) Compara tu cilindro con el de otros compañeros. Verifiquen que la altura mida 6 cm y el perímetro de la base, 15 cm.

DESCUBRO MÁS

¿Por qué en la actividad 2 se menciona el perímetro de la base (círculo) para trazar la plantilla?

Analiza, en grupo y con ayuda del profesor, el procedimiento que utilizaste para trazar la plantilla. Para ello, contesten las preguntas de la siguiente página.

- ¿Cuánto mide el rectángulo con que se forma la cara curva del cilindro?

  Largo: ________ Ancho: ________

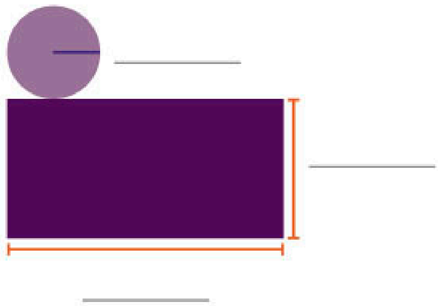
- ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias que trazaron?

  ____

- ¿Cómo calcularon la medida del radio? ____________________________

  ____

- Anoten, en el dibujo, las medidas que utilizaron para trazar el desarrollo plano y construir el cilindro.

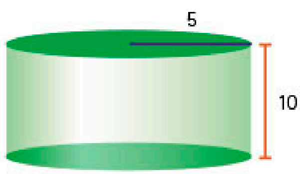


Taller de matemáticas

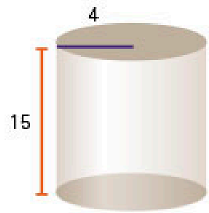
1. Analiza la información y responde. Considera 3.14 como valor de π.

Un fabricante desea producir una lata cilíndrica. Dos diseñadores le propusieron los siguientes modelos. En ambos casos el metal de la lata es del mismo grosor.

Modelo A



Modelo B



a) Si el fabricante optara por el envase en cuya fabricación se requiera menos material, ¿cuál le convendría producir? _______

b) Si quisiera el envase con el mayor volumen, ¿cuál le convendría elegir? ___________

c) Anota los cálculos que hiciste para responder los incisos a) y b).

____

____

____

____

____

MÁS IDEAS

A simple vista y sin hacer cálculos, ¿qué lata estimas que requiera más material para ser construida? ¿Cuál piensas que tiene el mayor volumen?

SECUENCIA 20

Datos estadísticos I

Lección 60. Natalidad en México

Aprendizaje esperado: usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos, y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

1. Analiza la información y responde.

De acuerdo con datos de la Encuesta Intercensal 2015, hecha por el INEGI, el promedio de hijos nacidos vivos para las mujeres en México es de 2.27.

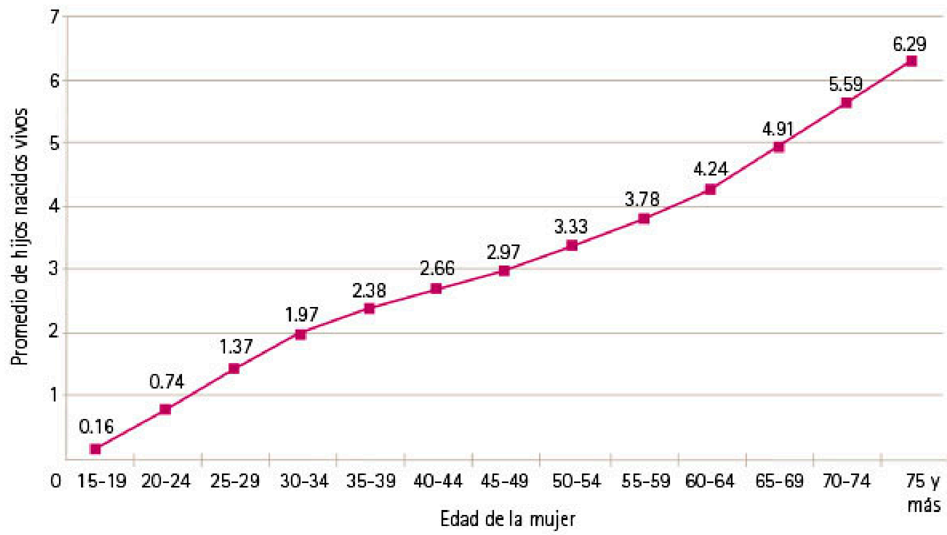
¿Cómo interpretas este dato? ______________________________

____

2. Responde con base en la gráfica. Puedes usar calculadora.

promedio o media aritmética: número que se obtiene al sumar datos numéricos y dividir el resultado entre la cantidad de datos.

Promedio de hijos nacidos vivos en México por grupos quinquenales de edad



Elaboración propia con datos de INEGI, "Encuesta Intercensal 2015", disponible en ‹www.beta.inegi.org.mx/proyectos/enchogares/especiales/intercensal/›

a) ¿Cuál es el promedio de hijos nacidos vivos para mujeres de 70 a 74 años de edad? ______________________________

b) En la gráfica se observa que, a mayor edad de la mujer, mayor es el promedio de hijos nacidos vivos. ¿A qué se debe esto? ______________________________

____

c) Si en 2015 había en el país 1 794 950 mujeres de 75 años o más, ¿cuántos hijos en total tuvieron esas mujeres? ______________________________

d) ¿En qué grupos de edad el número de hijos nacidos vivos es menor que el número correspondiente de mujeres? ______________________________

e) ¿En qué quinquenio de edad el número de hijos nacidos vivos es casi el triple que el número correspondiente de mujeres? ______________________

quinquenio: periodo de cinco años.

f) De acuerdo con la información de la actividad 1, el promedio de hijos nacidos vivos es de 2.27 hijos por mujer.

¿Se obtiene el mismo promedio si se suman los datos de la gráfica (0.16, 0.74, 1.37, 1.97…) y se divide entre el total de datos (13)? ______________________

g) Si los promedios del inciso anterior no coinciden, explica por qué.

____

____

____

3. De acuerdo con datos de la misma encuesta, en el grupo de edad de 12 a 14 años hay adolescentes que ya están unidas o casadas y tienen hijos. La tabla muestra los datos referentes a dos entidades.

Mujeres de 12 a 14 años de edad unidas o casadas

Entidad	Total de mujeres	Promedio de hijos por mujer	Número aproximado de hijos
Baja California	372	0.40	
Baja California Sur	49	0.04	

a) Completa la tabla anterior.

b) Calcula el promedio de hijos por mujer (de 12 a 14 años de edad y unidas o casadas) si se consideran las dos entidades juntas. ______________________

4. Trabaja en grupo. Organícense para investigar el número de hijos de 100 mujeres de su comunidad que tengan 15 años o más (incluyan a mujeres con y sin hijos) y calculen la media aritmética de hijos por mujer.

¿El promedio que obtuvieron es mayor, menor o igual que el nacional? __________

¿A qué piensan que se debe la diferencia? ______________________

____

____

____

Validen las respuestas de esta lección. Comenten cómo interpretaron cada promedio y, con ayuda del profesor, platiquen acerca de las desventajas de ser madre adolescente y cómo puede aminorarse ese problema.

Lección 61. Mujeres y hombres en México

1. Trabaja en pareja. Analicen la información y respondan o hagan lo que se pide.

mediana: el valor de en medio cuando los datos están ordenados (si hay dos valores centrales, se obtiene la media de ambos para calcular la mediana).

Mediana del ingreso por hora de trabajo remunerado por grupo de edad, nivel de escolaridad y situación conyugal

	Hombres	Mujeres
Total	$20.40	$19.40
Grupos de edad		
14-29	$18.50	$17.40
30-59	$22.50	$20.20
60 y más	$16.60	$15.00
Nivel de escolaridad		
Sin escolaridad y primaria incompleta	$15.20	$13.70
Primaria completa y secundaria incompleta	$18.50	$16.70
Secundaria completa y más	$23.60	$22.50
Situación conyugal		
Soltero(a)	$18.60	$17.90
Casado(a) o unido(a)	$21.30	$20.40
Separado(a), divorciado(a) y viudo(a)	$20.40	$18.00

Fuente: INEGI-STPS, "Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo 2010", segundo trimestre.

DESCUBRO MÁS
¿Por qué piensas que se escogió la mediana del ingreso en lugar del ingreso promedio? Coméntalo con tus compañeros y el profesor.

DESCUBRO MÁS
Para las afirmaciones falsas, da un contraejemplo de cada una.

a) ¿Qué medida de tendencia central se usó para presentar los datos?

____

b) Anoten V o F para indicar si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Para las falsas, anoten contraejemplos en su cuaderno.

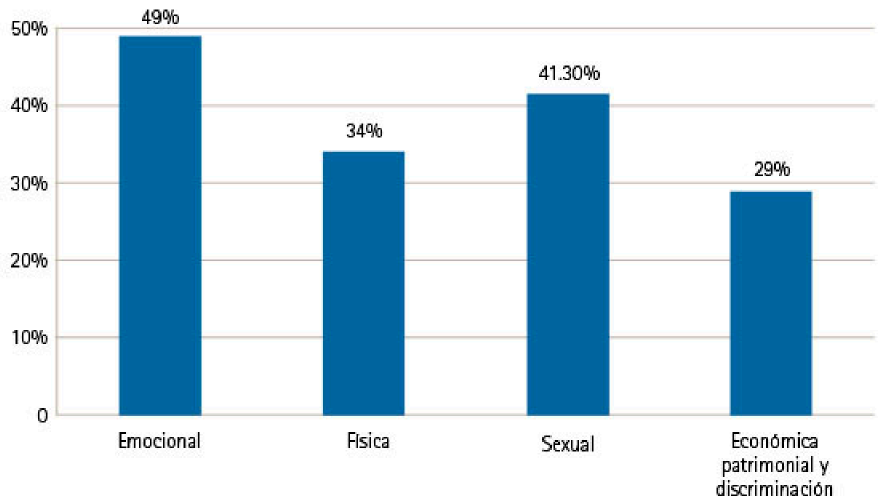
- En todos los casos, el ingreso por hora de trabajo es mayor en los hombres que en las mujeres. _____
- A mayor escolaridad, mayor ingreso por hora de trabajo. _____
- A mayor edad, mayor ingreso por hora de trabajo. _____
- Las mujeres separadas, divorciadas o viudas ganan más que las casadas o unidas. _____
- La mitad de los hombres encuestados de 30 a 59 años gana menos de $22.60 por hora de trabajo. _____
- La cuarta parte de las mujeres sin escolaridad o con primaria incompleta gana menos de $13.30 por hora de trabajo. _____

2. Responde con base en la información. Corresponde a los resultados de una encuesta hecha en 2016 a mujeres de 15 años o más en 142 363 viviendas del país.

De las mujeres de 15 años y más, 66.1% han sufrido al menos un incidente de violencia emocional, económica, física, sexual o discriminación a lo largo de su vida.

Fuente: INEGI, "Encuesta Nacional sobre la Dinámica de las Relaciones en los Hogares 2016".

Tipo de violencia contra las mujeres de 15 años o más a lo largo de su vida



MÁS IDEAS

¿Por qué los porcentajes de la gráfica no suman 100%?

Violencia contra las mujeres de 15 años o más por ámbito en los últimos doce meses

Violencia...	Porcentaje de mujeres que la han sufrido
escolar	17.4%
laboral	22.5%
comunitaria	23.3%
familiar	10.3%
de pareja	25.6%

a) Si en 2016 había en el país aproximadamente 44 millones de mujeres de 15 años o más, ¿cuántas habían sufrido algún incidente de violencia a lo largo de su vida?

____

b) ¿Qué dato de la tabla anterior corresponde a la moda? _______________

c) ¿Qué dato de la gráfica anterior corresponde a la moda? _______________

moda: el dato que más veces se repite, es decir, el de mayor frecuencia.

Valida en grupo tus resultados. Comenten por qué no se puede calcular la media ni la mediana para los datos presentados en la gráfica y en la tabla. Discutan acerca de la importancia de la equidad de género y la no violencia contra las mujeres.

Lección 62. Problemas diversos

1. Trabaja con un compañero. Anoten un número en cada tarjeta, de manera que para cada grupo de cinco tarjetas se obtenga la medida de tendencia central indicada.

Media aritmética: 10

Moda: 6

Mediana: 9

DESCUBRO MÁS
Encuentra un conjunto de cinco números que cumplan simultáneamente las tres condiciones de la actividad 1: que su promedio sea 10; su moda, 6; y su mediana, 9.

2. Analicen la información y respondan. Justifiquen en su cuaderno cada respuesta.

a) Se midió la estatura de 10 niños. Si la estatura mayor es 1.45 m, ¿es posible que…

- la media aritmética sea 1.46 m? ____
- la moda sea 1.45 m? ____
- la mediana sea 1.46 m? ____
- tres niños midan 1.45? ____

b) En sus primeras cuatro tareas de la clase de ciencias, Karla obtuvo las siguientes calificaciones.

Número de tarea	1	2	3	4
Calificación	6	5	7	2

- Si todas las tareas tienen el mismo "peso", es decir, contribuyen por igual a la calificación, ¿cuál era el promedio de calificación para las tareas de Karla?

____

- Con su quinta tarea, el promedio de Karla era de 6. ¿Qué calificación obtuvo en la quinta tarea? ____________________

c) El peso de 7 niños es 21 kg, 19 kg, 17 kg, 16 kg, 18 kg, 16 kg y 15 kg.

- ¿Cuál es la mediana de estos datos? __________ ¿Y la media aritmética?

____

- ¿Cuál es la mediana si se incluye el peso de otro niño de 45 kg? __________ ¿Y la media aritmética? ____________________

- De entre la media y la mediana, ¿qué medida es más "sensible" (cambia más) cuando se agrega un dato que difiere mucho de los demás?

____

d) En una escuela califican a sus alumnos con la siguiente escala.

E – Excelente
MB – Muy bien
B – Bien
R – Regular
S – Suficiente
NA – No aprobado

Los alumnos de dos grupos obtuvieron las siguientes calificaciones.

Grupo A: E, E, MB, B, R, R, R, R, R, R, S, S, S, NA, NA

Grupo B: MB, MB, B, B, B, R, R, R, R, R, S, S, S, S

- ¿Qué medida de tendencia central se puede usar para representar las calificaciones de cada grupo? ______________________
- ¿Qué grupo consideras que obtuvo mejores calificaciones? ____________
____

Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten por qué para datos que no son numéricos no es posible calcular la media aritmética.

Taller de matemáticas

1. Trabaja en equipo.
   a) Investiguen en alguna fuente confiable (libros, revistas, periódicos, páginas de internet institucionales, etc.) datos de su comunidad sobre algún tema de relevancia social (por ejemplo, escolaridad de la población, cobertura de servicios de salud pública, gasto e ingreso mensual de las familias, características del padrón electoral, entre otros).

   b) Preparen una presentación para el grupo que tenga tablas, gráficas y el cálculo de alguna de las medidas de tendencia central. Incluyan una argumentación de por qué decidieron usar la medida elegida y no otra.

   c) Presenten su trabajo al grupo y comenten juntos sus conclusiones.

2. Trabaja en grupo. Hagan una encuesta entre sus familiares en la que para interpretar los datos resulte útil alguna de las medidas de tendencia central (media, mediana o moda).

   a) Antes de efectuar la encuesta, decidan qué preguntarán (máximo tres preguntas), a cuántas personas encuestarán y cómo se organizarán. Comenten también cuáles piensan que serán los resultados.

   b) Lleven a cabo la encuesta, organicen los datos recabados y comenten si los resultados son parecidos o no a los que esperaban.

TIC MÁS Investiguen cómo hacer gráficas con una hoja de cálculo y usen la herramienta para la presentación de su investigación.

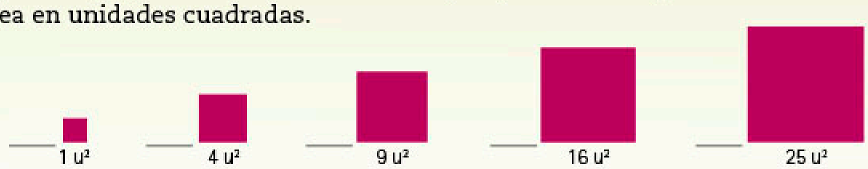
SECUENCIA 21

Potencias y raíz cuadrada

Lección 63. La medida de un lado

Aprendizaje esperado: resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

1. Trabaja en equipo. Observen los cuadrados y respondan. Debajo de cada uno está su área en unidades cuadradas.



a) ¿Cuántas unidades mide un lado de cada cuadrado? Anota las respuestas junto a cada uno.

b) ¿Cuánto mide un lado de un cuadrado cuya área es 6.25 cm^2? ______

c) ¿Y un lado de un cuadrado cuya área es 169 m^2? ______

d) ¿Y el de un cuadrado cuya área es 172 m^2? ______

e) ¿Cuánto mide un lado de un cuadrado cuya área es $\frac{1}{4}$ m^2? ______

Validen sus respuestas con el resto del grupo. Comenten cómo calcularon las medidas de los lados del cuadrado y analicen la información del recuadro.

La medida del lado de un cuadrado es un número que multiplicado por sí mismo da el área. En algunos casos, si conocemos el área, podemos calcular la medida exacta de cada lado; en otros, solo es posible expresarla de manera aproximada.

2. Completa la tabla con un compañero. En la tercera columna escriban si la medida de un lado es exacta o aproximada; pueden usar calculadora para hacer multiplicaciones. Después, comenten la información del recuadro.

DESCUBRO MÁS
¿Cuánto mide un lado de un cuadrado si su área es 1 m^2?, ¿y si su área es 1 km^2?

Área del cuadrado (m^2)	Medida de un lado (m)	¿Exacta o aproximada?	Perímetro (m)
49			
100			
8			
12			
144			
6			
48			
1.69			
875			
3 481			

La medida de un lado de un cuadrado es la raíz cuadrada de su área. Calcular la raíz cuadrada de un número *n* consiste en encontrar un número tal que multiplicado por sí mismo dé o se aproxime a *n*. El símbolo de raíz cuadrada es $\sqrt{\ }$.

3. Efectúen, mentalmente, los siguientes cálculos. Si no encuentran una raíz exacta (esto es, que multiplicada por sí misma dé el número dado), anoten una aproximación o escriban los dos enteros consecutivos entre los que se encuentra la raíz buscada.

a) $\sqrt{64}$ = _____
b) $\sqrt{81}$ = _____
c) $\sqrt{20}$ = _____
d) $\sqrt{50}$ = _____
e) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ = _____
f) $\sqrt{2.25}$ = _____
g) $\sqrt{1}$ = _____
h) $\sqrt{2^2}$ = _____
i) $\sqrt{5^2}$ = _____
j) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ = _____

MÁS IDEAS
La raíz cuadrada de $\sqrt{\frac{a}{b}}$ equivale a $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Revisen, en grupo, sus resultados. Comenten lo siguiente: si la raíz cuadrada de 20 está entre 4 y 5, ¿podría ser 4.5? ¿Qué número multiplicado por sí mismo da como resultado $\frac{1}{9}$?

4. Completa la tabla.

Número (n)	Número al cuadrado (n^2)	Raíz cuadrada de n^2
1		
10	$10^2 = 10 \times 10 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
2.5		
31		
$\frac{1}{2}$		
n		

Comenta, en grupo, cómo es la relación entre las operaciones de sacar raíz cuadrada y elevar al cuadrado.

Para números positivos, elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada son operaciones inversas. Por ejemplo, $5^2 = 25$, $\sqrt{25} = 5$. De manera general, $\sqrt{a^2} = a$.

DESCUBRO MÁS
¿Por qué en el recuadro se especifica que elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada son operaciones inversas cuando se trata de números positivos? ¿Qué sucede en el caso de los números negativos?

5. Resuelve. Una hectárea de terreno son 10 000 m². Si un terreno mide una hectárea y es de forma cuadrada…

a) ¿cuánto mide un lado? ______________________

b) Si el terreno mide dos hectáreas y es de forma cuadrada, ¿cuánto mide un lado? ______________________

Lección 64. Una técnica para calcular la raíz cuadrada

1. Trabaja en equipo. Analicen la información del recuadro y respondan las preguntas para calcular $\sqrt{3857}$.

Una técnica para calcular la raíz cuadrada es encontrar, mediante aproximaciones sucesivas, un número que multiplicado por sí mismo dé el número al que se quiere extraer raíz cuadrada o se acerque a él. Por ejemplo, para encontrar $\sqrt{3857}$, se efectúa lo siguiente.

- $100 \times 100 = 10000$, entonces, el número buscado es menor que 100.
- $50 \times 50 = 2500$, por tanto, el número buscado es mayor que 50.
- $60 \times 60 = 3600$, en ese caso, el número buscado es mayor que 60.
- $61 \times 61 = 3721$, por tanto…

a) ¿Piensas que el número buscado es mayor que 70? ______

b) ¿Y mayor que 65? ____ ¿Por qué? ______

c) ¿Cuál es el número buscado sin parte decimal? ______

d) Al multiplicar ese número por sí mismo, ¿cuánto le falta al producto para llegar a 3857? ______

e) ¿Cuál es el número buscado, aproximado a una cifra decimal? ______

2. Completa la tabla. El radicando es el número al que se extrae raíz cuadrada. Puedes usar calculadora para hacer multiplicaciones.

Radicando (n)	Raíz cuadrada de n sin parte decimal	Resto	Relación entre n, su raíz cuadrada y el resto
8	2		$8 = 2 \times 2 + 4$
18			
	9	0	
740			
	20	0	
4520			
35827			
	500	0	

MÁS IDEAS

La expresión decimal de cualquier número fraccionario es finita, como en $\frac{3}{2} = 1.5$, o bien, es infinita, pero tiene un conjunto de cifras (periodo) que se repite, como en $\frac{7}{6} = 1.1666...$ (la cifra 6 se repite indefinidamente). En cambio, la expresión decimal de algunas raíces cuadradas es infinita y no tiene un periodo que se repite, por ejemplo, $\sqrt{8} = 2.828417124...$

3. Los siguientes números tienen raíz exacta, cada uno resulta de elevar al cuadrado cualquiera de dos números opuestos. Encuentra esos números y anótalos al inicio y al final de las flechas, como en el ejemplo.

a) 36

$(6)^2$ $(-6)^2$

$\sqrt{36} = \pm 6$

b) 324

c) 529

d) 12.25

e) $\frac{4}{6}$

f) 1

4. Resuelve.

a) $(3 + 5)^2 =$ ____________________

b) $(3 - 5)^2 =$ ____________________

c) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})^2 =$ ____________________

d) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})^2 =$ ____________________

e) $(2.2 + 1.3)^2 =$ ____________________

f) $(2.2 - 1.3)^2 =$ ____________________

5. Calcula las raíces y anota los resultados. El primer caso está resuelto.

a) $\sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = \pm 4$

b) $\sqrt{40 - 2^2} =$ _____

c) $\sqrt{3^2} =$ _____

d) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} =$ _____

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas de esta lección. En especial, comenten cómo resolvieron la multiplicación $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$. Analicen juntos la información del recuadro.

Cualquier número positivo tiene dos raíces, una positiva y otra negativa. Para indicar esta propiedad se usa el signo “más menos”, como se muestra en el ejemplo.

$$\sqrt{49} = \pm 7, \text{ es decir, } 7 \text{ y } -7.$$

También puede expresarse por separado: $\sqrt{49} = 7$, pues $7 \times 7 = 49$; $\sqrt{49} = -7$, pues $(-7) \times (-7) = 49$.

DESCUBRO MÁS

Si $\sqrt{3}$ es un número que multiplicado por sí mismo da 3, ¿cuánto es $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$? De manera general, si x es un número positivo, ¿cuánto es $(\sqrt{x})(\sqrt{x})$?

DESCUBRO MÁS

¿Piensas que existen raíces cuadradas de números negativos? Por ejemplo, ¿conoces un número que multiplicado por sí mismo dé −36?

Lección 65. Notación científica y algo más

MÁS IDEAS
En la lección 36 aprendiste que el exponente negativo surge de una división de dos potencias con la misma base cuando el exponente del dividendo es menor que el del divisor.

1. Completa las igualdades; corresponden a potencias de base 10. Algunas están resueltas.

a) $10^7 = 10\,000\,000$ b) $10^6 = 1\,000\,000$ c) $10^5 =$ ____________

d) $10^4 =$ ____________ e) $10^3 =$ ____________ f) $10^2 =$ ____________

g) $10^1 =$ ____________ h) $10^0 =$ ____________ i) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

j) $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$ k) $10^{-3} =$ ____________ l) $10^{-4} =$ ____________

m) $10^{-5} =$ ____________ n) $10^{-6} =$ ____________ o) $10^{-7} =$ ____________

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Comenten la información del recuadro.

En las potencias de base 10 con exponente positivo, el exponente coincide con el número de ceros del número. En las potencias de base 10 con exponente negativo, el exponente coincide con la cantidad de cifras decimales.

2. Completa la tabla.

Descripción de la cantidad o magnitud	Cantidad con letras	Cantidad con cifras
Distancia promedio de la Tierra al Sol (km)	Ciento cuarenta y nueve millones de kilómetros	
Presupuesto de la SEP en 2018	Doscientos ochenta y un mil millones de pesos	
Tamaño aproximado de una bacteria	Cinco diezmilésimas de milímetro	
Longitud de un micrómetro	Un millonésimo de metro	
Cantidad de autos que circulan en la Ciudad de México	Tres millones quinientos mil automóviles	

Valida, en grupo, tus respuestas. Analicen juntos la información del recuadro.

En la tabla anterior, las cantidades de la tercera columna se pueden expresar en *notación científica*, es decir, de la siguiente forma:

$$a \times 10^n$$

En este producto, a es un número mayor o igual que 1 y menor que 10, llamado *coeficiente*, y n es un número entero. Por ejemplo, 149 000 000 en notación científica se escribe 1.49×10^8, donde 1.49 es el coeficiente; el número 0.0005 (cinco diezmilésimos) en notación científica se escribe 5×10^{-4}.

3. Escribe, en notación científica, las cantidades de la actividad 2.

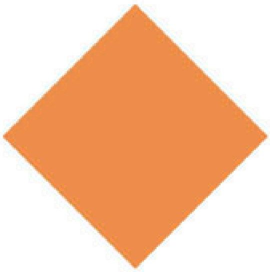
Descripción de la cantidad o magnitud	En notación científica
Distancia promedio de la Tierra al Sol (km)	
Presupuesto de la SEP en 2018	
Tamaño aproximado de una bacteria	
Longitud de un micrómetro	
Cantidad de automóviles que circulan en la Ciudad de México	

MÁS IDEAS
Al escribir una cantidad en notación científica, el exponente de la potencia de 10 coincide con la cantidad de lugares que hay que recorrer el punto decimal para volver a la escritura desarrollada, ya sea a la derecha o a la izquierda.

Valida, en grupo y con ayuda del profesor, los resultados de la tabla. Corrijan lo necesario.

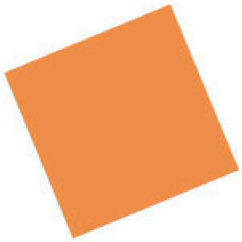
Taller de matemáticas

1. Calcula y anota el perímetro de los terrenos cuadrados que se ilustran.



Área: 320 m²
Perímetro: ______________

Área: 360 m²
Perímetro: ______________



Área: 290 m²
Perímetro: ______________

TIC MÁS Aprende más sobre potencias y raíces cuadradas en www.redir.mx/SCMM2-141a.

2. Ordena los números de menor a mayor.

2×10^{-2}, 3×10^{-1}, 2.5×10^{-3}, 2.9×10^{-2}, 3.2×10^{-1}

____

3. Efectúa los cálculos.

a) $\frac{(12-5)^2\,(7-3)^2}{(8-5)^3} =$ ______________________

b) $\frac{(16-9)^2\,(17-15)^2}{3(16-11)^3} =$ ______________________

c) $\sqrt{\frac{(15-6)^3}{(15-6)^2}} =$ ______________________

d) $\frac{\sqrt{5^2+75}}{10^2} =$ ______________________

SECUENCIA 22

Sistemas de ecuaciones II

Lección 66. Resolución de sistemas de ecuaciones por igualación

Aprendizaje esperado: resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1. Trabaja con un compañero. Resuelvan el sistema de ecuaciones con el método que prefieran (ensayo y error, método gráfico...). Verifiquen que la solución resuelva ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} \text{Ecuación 1: } 2x + y = 7 \\ \text{Ecuación 2: } x + y = 4 \end{cases}$$

Solución: $x =$ ___; $y =$ ___

2. Analicen cómo se resuelve el sistema anterior con el *método de igualación*.

a) La idea general es la siguiente, complétenla:

- Dado que el par de valores de x, y que buscamos cumplen con la ecuación 1, y debe valer lo mismo que $-2x + 7$; pero como también cumplen con la segunda ecuación, entonces y debe valer también $-x + 4$.
- Si $y = -2x + 7$ y, al mismo tiempo, $y = -x + 4$, ¿qué puede decirse de $-2x + 7$ y de $-x + 4$? ___
- ¿Qué ecuación se obtiene a partir de la observación anterior?

___

b) Hagámoslo ahora paso por paso. Completen la resolución.

Técnica de igualación

Paso 1. Se despeja x o y en ambas ecuaciones. En este caso es más sencillo despejar y.

Despeje de y en la primera ecuación: $2x + y = 7$; $y = 7 - 2x$.

Despeje de y en la segunda ecuación: $x + y = 4$; $y =$ ___

Paso 2. Se forma una igualdad con los dos valores de y obtenidos en el paso 1. Así se obtiene una ecuación con una sola incógnita. $7 - 2x =$ ___

Paso 3. Se resuelve la ecuación anterior para obtener el valor de x.

___

Paso 4. Se usa el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el de y.

___

Verifiquen si su solución es correcta sustituyendo en ambas ecuaciones los valores que encontraron para x y para y. También pueden usar el método gráfico y comprobar si se obtiene la misma respuesta.

MÁS IDEAS

Para despejar y en la ecuación $2x + y = 7$, basta con sumar $-2x$ en ambos miembros de la igualdad: $-2x + 2x + y = -2x + 7$; $y = -2x + 7$.

MÁS IDEAS

Cualquier problema matemático se puede resolver de distintas maneras. Es bueno conocer más de un método, pues hay casos en los que uno resulta más eficiente que el otro (¡o por si se te olvida alguno de los métodos!).

3. Resuelvan, en su cuaderno, los sistemas con la técnica de igualación. Anoten la solución debajo de cada sistema.

a) $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } x + 15y = 31 \\ \text{Ecuación 2: } x - 2y = -3 \end{cases}$

$x =$ ___; $y =$ ___

b) $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } 2x + y = -8 \\ \text{Ecuación 2: } 3x - 2y = -5 \end{cases}$

$x =$ ___; $y =$ ___

c) $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } y = 6 - 2x \\ \text{Ecuación 2: } 3x - y = 14 \end{cases}$

$x =$ ___; $y =$ ___

d) $\begin{cases} \text{Ecuación 1: } x = y + 4 \\ \text{Ecuación 2: } 6x - 10y = 0 \end{cases}$

$x =$ ___; $y =$ ___

4. Lean el problema e identifiquen, de los tres sistemas que se dan, el que representa la situación. Encuentren la solución del sistema y verifiquen que cumpla con las condiciones del problema.

Las edades de una madre y su hija suman 48 años. Dentro de seis años, la edad de la madre será cinco veces la de la hija. ¿Cuáles son las edades actuales de ambas?

$\begin{cases} x + y = 48 \\ x + 6 = 5(y + 6) \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 48 \\ 6x = 5y \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 48 \\ x + 6 = 5y + 6 \end{cases}$

___

DESCUBRO MÁS

Si llamamos *x*, *y* a las edades de la madre y la hija, respectivamente, ¿cómo se expresa la suma de sus edades? ¿Cómo se expresa la edad de cada una dentro de seis años? ¿Cómo se expresa que dentro de seis años la edad de la madre será cinco veces la de la hija?

Validen en grupo sus respuestas. Comenten cómo identificaron el sistema de ecuaciones que resuelve el problema y qué método utilizaron para resolverlo.

5. Trabaja en equipo. Formulen, para cada problema, un sistema de ecuaciones y resuélvanlo en su cuaderno con la técnica que prefieran. Anoten aquí su solución.

a) La cajera de un banco recibió $500.00 en monedas de $5.00 y de $10.00. La máquina cuentamonedas indica que son 82 en total. ¿Cuántas monedas de $5.00 y de $10.00 recibió la cajera?

___

b) Un día, la señora Juana vendió en su papelería 30 cuadernos, por los cuales recibió $840.00. Doña Juana solo vende cuadernos de $24.00 y de $30.00. ¿Cuántos vendió de cada precio?

___

c) En un taller de artesanía usarán 139 ruedas para hacer bicicletas pequeñas y triciclos. En total harán 57 vehículos. ¿Cuántos de cada uno se harán?

___

Hagan, en grupo y con ayuda del profesor, lo siguiente.

- Comparen el sistema de ecuaciones que formularon para cada problema; en caso de que no coincidan, identifiquen si hay algún error.
- Revisen sus procedimientos para resolver cada sistema de ecuaciones.
- Comparen sus soluciones.
- Verifiquen que cada solución cumpla las condiciones del problema.

Lección 67. Resolución de sistemas de ecuaciones por sustitución

1. Trabaja con un compañero.

a) Resuelvan el sistema de ecuaciones sin graficarlas. Verifiquen que la solución satisfaga a ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 3a + 2b = 9 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Solución: $a =$ ___; $b =$ ___

b) Ahora conocerán cómo se resuelve el sistema de ecuaciones con el *método de sustitución*. La clave es sustituir, en una de las ecuaciones, una de las incógnitas por su valor en términos de la otra. Completen la resolución.

Técnica de sustitución

¿Qué queremos?	¿Cómo lo haremos?	Transformación de las ecuaciones
Paso 1. Expresar el valor de una incógnita en términos de la otra.	Se escoge cualquiera de las ecuaciones y se despeja una incógnita. En este caso, elegimos la segunda y despejamos b, porque es más sencillo.	$2a + b = 5$ ↓ $b = 5 - 2a$
Paso 2. Obtener una sola ecuación con una incógnita.	En la ecuación que no hemos usado, sustituimos b por su valor: ______________	$3a + 2b = 9$ ↓ $3a + 2(5 - 2a) = 9$
Paso 3. Obtener el valor de a.	Se resuelve la ecuación del paso anterior.	$3a + 10 - 4a = 9$ ↓ $a = 1$
Paso 4. Calcular el valor de b.	Se sustituye a por su valor, que es 1, en cualquiera de las ecuaciones originales, para obtener una ecuación con una incógnita y resolverla.	$2a + b = 5$ ↓ $2(1) + b = 5$ ↓ $b = 3$
Paso 5. Verificar que los valores satisfagan ambas ecuaciones.	Se evalúa con $a =$ ___ y $b =$ ___ en las ecuaciones originales.	3(___) + 2(___) = 9 ✔ 2(___) + ___ = 5 ✔

DESCUBRO MÁS

En el paso 1, ¿por qué se afirma que es más fácil elegir la segunda ecuación y despejar b?

2. Usen la técnica de sustitución para resolver los sistemas. Trabajen en su cuaderno.

a) $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$ Solución: $a =$ ____; $b =$ ____

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ Solución: $x =$ ____; $y =$ ____

c) $\begin{cases} 2m + 3n = 22 \\ m - 2n = 6 \end{cases}$ Solución: $m =$ ____; $n =$ ____

d) $\begin{cases} 3w - 2z = 5 \\ w + 2z = 15 \end{cases}$ Solución: $w =$ ____; $z =$ ____

3. Planteen, para cada problema, un sistema de dos ecuaciones y resuélvanlo como prefieran: gráficamente, con la técnica de igualación, con la de sustitución o con alguna otra.

a) Pensé dos números. Si al primero le resto el segundo obtengo 2; si al triple del primero le sumo el segundo, también obtengo 2. ¿Qué números son?

Ecuación 1: ______________ Ecuación 2: ______________

Solución: __________________

b) Pensé dos números. El primero más el segundo da como resultado 25; y el primero menos el segundo, 5. ¿Qué números son?

Ecuación 1: ______________ Ecuación 2: ______________

Solución: __________________

c) María compró 40 reglas para sus alumnos, unas a $10.00 y otras a $14.00. Gastó $460.00. ¿Cuántas reglas compró de cada tipo?

Ecuación 1: ______________ Ecuación 2: ______________

Solución: __________________

d) En la bodega hay 25 archiveros, unos de tres cajones y otros de cuatro. Si en total hay 85 cajones, ¿cuántos archiveros hay de cada tipo?

Ecuación 1: ______________ Ecuación 2: ______________

Solución: __________________

e) Se formó una tubería de 42.5 m uniendo quince tramos. Unos eran de 2.7 m y otros de 3.1 m. ¿Cuántos tramos de cada tipo se usaron?

Ecuación 1: ______________ Ecuación 2: ______________

Solución: __________________

DESCUBRO MÁS

Inventa una situación que se resuelva con alguno de los sistemas de la actividad 2. Verifica que las soluciones cumplan con las condiciones del problema.

MÁS IDEAS

Al emplear la técnica de sustitución, puedes decidir en qué ecuación despejar cualquiera de las incógnitas. Analiza siempre en qué ecuación y qué incógnita te conviene despejar.

Lección 68. Resolución de sistemas de ecuaciones por suma y resta

1. Haz, con un compañero, lo que se pide.

a) Completen las igualdades.

$9 + 3 = 5 +$ ____

$8 + 7 = 4 +$ ____

b) Completen la expresión con los números que anotaron en el inciso anterior. Verifiquen que la suma de los primeros miembros de las dos igualdades anteriores sea igual a la suma de los segundos miembros.

$9 + 3 + 8 + 7 = 5 +$ ____ $+ 4 +$ ____

c) ¿Sucede lo mismo si se restan miembro a miembro dos igualdades? Prueben con algunos ejemplos y escriban su conclusión.

____

____

____

MÁS IDEAS

Los miembros de una igualdad son las expresiones que aparecen a ambos lados del signo =.

$9 + 3 = 5 + 7$

Primer miembro — Segundo miembro

d) Analicen la información del recuadro.

La técnica para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, llamada *de suma y resta*, se basa en la siguiente propiedad de las igualdades:

Si $a = b$, y $c = d$,

entonces, $a + c = b + d$, o bien, $a - c = b - d$.

Con base en esta propiedad, la idea es sumar o restar miembro a miembro una ecuación del sistema a otra, de manera que se elimine una incógnita para obtener una sola ecuación con una incógnita.

2. Para conocer la técnica de suma y resta, resuelvan el sistema formado por las ecuaciones $x + 2y = 12$, $3x - 2y = 26$. Hagan lo que se pide.

a) Sumen miembro a miembro las ecuaciones.

$$\begin{array}{rrcrcr} & x & + & 2y & = & 12 \\ + & 3x & - & 2y & = & 26 \quad + \\ \hline & \_\_\_\_ & & & = & \_\_\_ \end{array}$$

b) Observen que la ecuación que resulta tiene una sola incógnita. Resuélvanla.

¿Cuánto vale x? ______

c) Sustituyan x por su valor en cualquiera de las ecuaciones originales. Obtendrán otra ecuación, cuya incógnita es y. Resuélvanla.

¿Cuánto vale y? ______

3. Noten que fue sencillo resolver el sistema de ecuaciones anterior porque las ecuaciones tenían términos opuestos, es decir, términos que al sumarse dieron 0: 2y, –2y. También es posible usar la técnica de suma y resta cuando las ecuaciones no tienen términos opuestos. Hagan lo siguiente.

   a) Observen cómo se resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$$

   b) Primero hay que obtener dos ecuaciones equivalentes a las anteriores, pero con términos opuestos.

   - Se puede, por ejemplo, multiplicar los miembros de la primera ecuación por –5, y los de la segunda por 2. Así aparecerán los términos opuestos –10x, en la primera, y 10x, en la segunda.

   c) Completen la solución.

Técnica de suma y resta

Paso 1. Se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por –5.	$2x + 3y = 8$ $-5(2x + 3y) = -5(8)$ $-10x - 15y = -40$
Paso 2. Se multiplican los dos miembros de la segunda por 2.	$5x + 2y = 9$ $2(5x + 2y) = 2(9)$ $10x + 4y = 18$
Paso 3. Se suman miembro a miembro las ecuaciones obtenidas.	$-10x - 15y = -40$ $10x + 4y = 18$ $0 - 11y = -22$
Paso 4. Se resuelve la ecuación con una incógnita obtenida en el paso anterior.	$y =$ ________
Paso 5. Se sustituye *y* por su valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales. Se resuelve la ecuación con la incógnita *x* que se obtiene.	Ecuación de incógnita *x*: ______________________ Solución: $x = 1$

términos opuestos: aquellos que al sumarse dan 0; por ejemplo, +7 y –7, 3.5*x* y –3.5*x*, $-3a^2b$ y $3a^2b$.

DESCUBRO MÁS

¿Qué sucede si se multiplica la primera ecuación original por –2 y la segunda por 3? ¿Qué variable se elimina en ese caso?

DESCUBRO MÁS

Elabora, en tu cuaderno, un diagrama que muestre los pasos de cada técnica de resolución de sistemas de ecuaciones que aprendiste en esta secuencia.

Taller de matemáticas

1. Resuelve los sistemas con la técnica que prefieras.

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -2 \end{cases}$ $x =$ ____; $y =$ ____

b) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ $x =$ ____; $y =$ ____

c) $\begin{cases} 8x + y = 8 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$ $x =$ ____; $y =$ ____

Valida tus respuestas con el resto del grupo. Si para algún sistema usaron métodos de resolución distintos, comenten las ventajas y desventajas de cada método.

TIC MÁS Aprende más sobre sistemas de ecuaciones en www.redir.mx/SCMM2-147a.

SECUENCIA 23

Variación II

Lección 69. A mayor volumen, ¿mayor masa?

Aprendizaje esperado: analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

1. Responde en tu cuaderno.

   a) ¿Qué piensas que pesa más: 1 kg de algodón o 1 kg de plomo?, ¿cuál estimas que ocupa más espacio?

   b) ¿Qué supones que ocupa más espacio: un centímetro cúbico (1 cm³) de corcho o un 1 cm³ de plomo?, ¿cuál consideras que pesa más?

Valida tus respuestas con tus compañeros. Analicen la información del recuadro.

Dependiendo del material de que se trate…
- una misma cantidad de masa, por ejemplo, 1 kg, puede ocupar más o menos espacio.
- en una misma cantidad de espacio, por ejemplo, en un 1 cm³, puede caber una cantidad de masa mayor o menor.

La cantidad de masa de un material que cabe en una unidad de volumen se llama *densidad* de ese material. Así, por ejemplo…
- la densidad del plomo es 11.3 gramos por centímetro cúbico, o 11.3 g/cm³. Esto significa que la masa de un centímetro cúbico de plomo es 11.3 gramos.
- la densidad del aluminio es 2.7 g/cm³ y la del agua, 1 g/cm³.

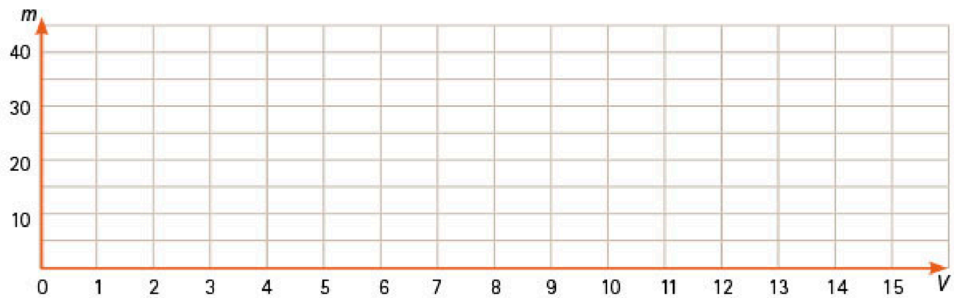
Si *m* representa la masa y *V*, el volumen, la expresión algebraica de la densidad (*D*) es la siguiente.

$$D = \frac{m}{V}$$

2. Completa la tabla con la relación entre masa y volumen para distintas cantidades de aluminio.

Volumen (cm³)	1		10		15
Masa (g)		13.5		32.4	

   a) A partir de la tabla anterior, traza la gráfica correspondiente en el plano cartesiano.



b) Contesta y justifica tu respuesta: ¿la masa de aluminio es directamente proporcional a su volumen, inversamente proporcional, o ninguna de las dos?

____

____

3. Resuelve los problemas. Si lo requieres, dibuja en tu cuaderno los cubos o haz un esquema que represente cada situación.

a) Dos cubos A y B, hechos con distinto material, ocupan ambos un espacio de 8 cm³. El cubo A tiene mayor masa que el B.

- ¿Qué cubo tiene mayor densidad? ______________________
- Para ejemplificar tu respuesta, asigna valores a las masas de A y B, y calcula la densidad de cada cubo. ______________________

____

b) El cubo C ocupa más espacio que el D. La masa del cubo D es mayor que la del C.

- ¿Qué cubo tiene mayor densidad? ______________________
- Ejemplifica tu respuesta asignando valores a las masas y a los volúmenes de C y de D, y calculando la densidad de cada uno. ______________________

____

c) Dos cubos, E y F, hechos con distinto material, tienen ambos una masa de 1 kg. El cubo E ocupa más espacio que el F.

- ¿Cuál tiene mayor densidad? ______________________
- Para ejemplificar tu respuesta, asigna un valor al espacio que ocupan E y F, y calcula la densidad de cada cubo. ______________________

____

d) Los cubos G y H están hechos con el mismo material. El cubo G ocupa 8 veces más espacio que el H.

¿Qué relación hay entre las masas de ambos cubos?

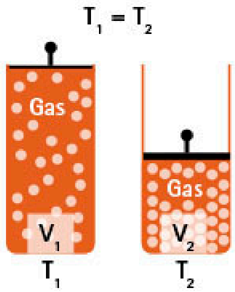
____

Valida tus respuestas con el resto del grupo. Verifiquen, para cada inciso, que el ejemplo que propusieron concuerde con su respuesta a la pregunta inicial, es decir, que realmente la ejemplifique. Después, comenten lo siguiente:

Si la masa de un objeto A es mayor que la de un objeto B, ¿puede concluirse que A ocupa más espacio que B?

Lección 70. Más relaciones de la física

1. Analiza las reglas de correspondencia de las siguientes relaciones y haz lo que se indica después.

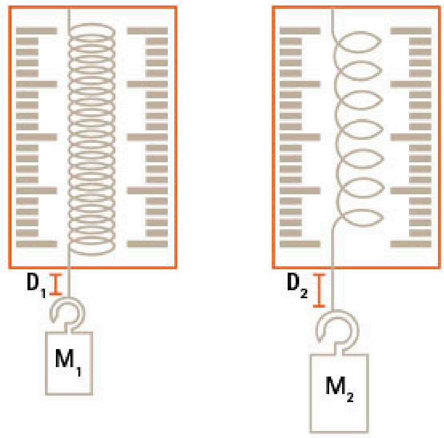


Si la temperatura permanece constante, el volumen (V) que ocupa una masa fija de gas, y la presión (P) que se ejerce sobre ella se relacionan mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$V = \frac{k}{P}$$, donde k es un valor constante. (Ley de Boyle)

El alargamiento (D) que sufre un resorte (dentro de su límite de elasticidad) cuando se le cuelga un objeto y la masa (M) del objeto se relacionan mediante la siguiente regla de correspondencia:

$D = kM$, donde k es un valor constante. (Ley de Hooke)



Explica, en tu cuaderno, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si consideras que alguna es falsa, corrígela.

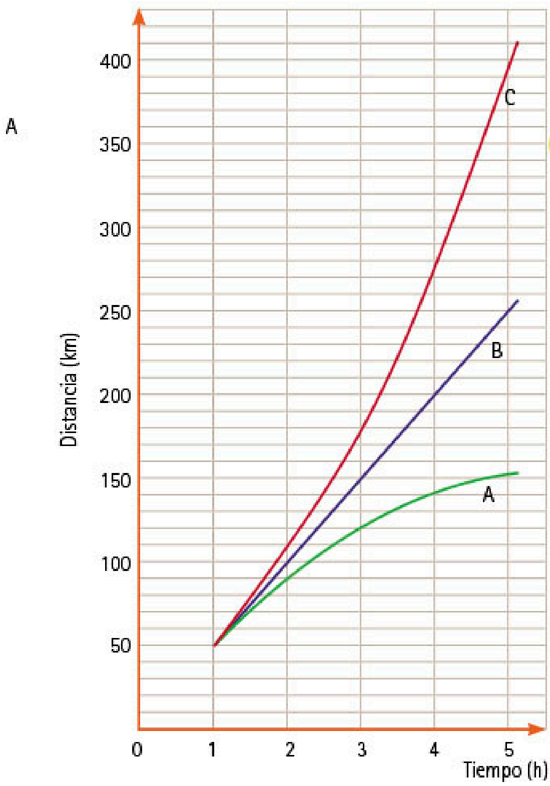
- A temperatura constante, el volumen es directamente proporcional a la presión; por tanto, entre más grande es la presión, mayor es el volumen que ocupa el gas.
- El alargamiento del resorte es directamente proporcional al peso que se cuelga de él; por tanto, entre mayor es el peso, mayor es el alargamiento del resorte,

MÁS IDEAS

Al aumentar la presión y disminuir el volumen que ocupa el gas, puede ocurrir una variación momentánea de temperatura, pero esta vuelve a su nivel original por el intercambio de calor con los alrededores. Por eso, en la Ley de Boyle, la temperatura se considera una constante.

2. Trabaja con un compañero. Analicen la información y hagan lo que se pide.

Las gráficas muestran la relación entre el tiempo de viaje de tres vehículos, A, B y C, y la distancia recorrida por cada uno.



a) Completen el texto a partir de las gráficas. Anoten A, B o C donde corresponda.

- El vehículo ____ avanza a una velocidad constante, es decir, por cada hora que pasa avanza la misma distancia.
- El vehículo ___ va aumentando su velocidad, es decir, por cada hora que pasa avanza mayor distancia.
- El vehículo ___ va disminuyendo su velocidad, es decir, por cada hora que pasa avanza menor distancia.

b) Completen la tabla a partir de las gráficas anteriores.

		Vehículo A		Vehículo B		Vehículo C	
		Distancia recorrida en la última hora (km)	Distancia total recorrida (km)	Distancia recorrida en la última hora (km)	Distancia total recorrida (km)	Distancia recorrida en la última hora (km)	Distancia total recorrida (km)
Tiempo	1 hora	50	50	50	50	50	50
	2 horas	40	90	50	100	60	110
	3 horas	30	120	50	150	70	180
	4 horas						
	5 horas						

Validen sus respuestas con sus compañeros. Respondan grupalmente las preguntas y comenten la información del recuadro que aparece después.

- ¿Qué vehículo avanza lo mismo cada hora, es decir, tiene velocidad constante?
- ¿Qué vehículo avanza más cada hora, es decir, su velocidad aumenta?
- ¿La velocidad de qué vehículo disminuye cada hora?
- ¿Para qué vehículos la gráfica es una línea recta?
- ¿En qué casos la distancia es directamente proporcional al tiempo?

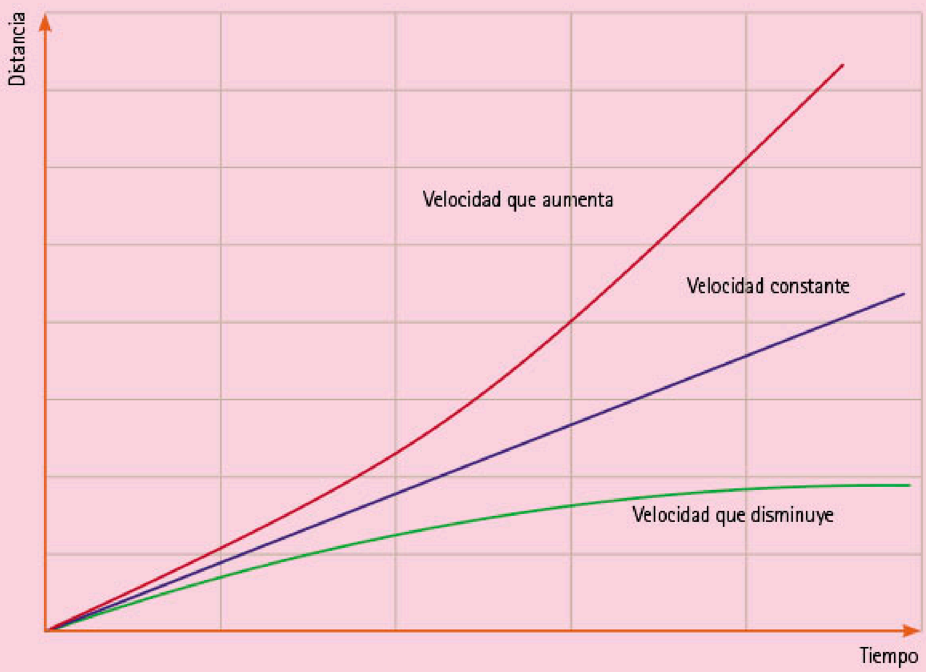
TIC MÁS Abre un archivo de GeoGebra y escribe el siguiente comando en la barra de entrada:

Cónica[(1, 50), (2, 90), (3, 120), (4, 140), (5, 150)]

¿A qué vehículo corresponde la gráfica que aparece en pantalla?

Cuando la velocidad es constante en lapsos de tiempo iguales (cada hora, o cada minuto, por ejemplo), el vehículo avanza la misma distancia. La distancia es directamente proporcional al tiempo. La gráfica es una línea recta.

Cuando la velocidad se incrementa o disminuye en lapsos iguales de tiempo, el vehículo avanza cada vez más o menos distancia. La distancia no es proporcional al tiempo. La gráfica es una línea curva.



DESCUBRO MÁS

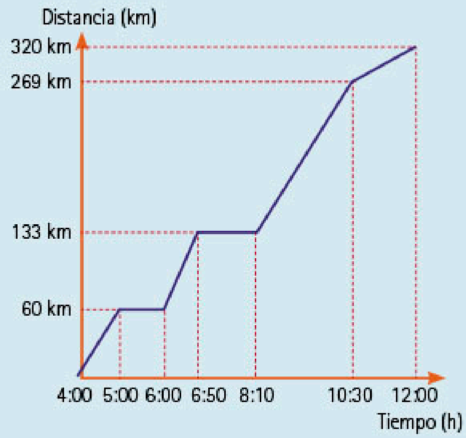
Además de ser líneas rectas, ¿qué otra cosa distingue a las gráficas de relaciones de proporcionalidad?

Lección 71. Bitácora de viaje y crecimiento

1. La gráfica corresponde al recorrido de un tráiler, de la Ciudad de México a la ciudad de Morelia. Lee la bitácora de viaje (informe que el chofer presenta a la empresa sobre el recorrido) e interpreta la gráfica para responder.

Bitácora de viaje

- Salí de la Ciudad de México el viernes 22 de junio a las 4:00 de la mañana.
- Me detuve solo dos veces, la primera en Toluca, para cargar diésel y poner la lona; la segunda en la caseta de cobro, poco antes de Atlacomulco, para almorzar.
- De Zinapécuaro a Morelia el camino está en reparación.



a) ¿De cuántos kilómetros fue el recorrido? __________

b) ¿Cuánto tiempo duró? __________

c) ¿En qué parte el tráiler avanzó más rápido? ______________________________

d) ¿A qué velocidad promedio recorrió el primer tramo de 60 km? ____________

e) ¿Cuánto tiempo se detuvo el tráiler la primera vez? __________

f) ¿La distancia que recorre el tráiler y el tiempo transcurrido cambian de manera proporcional? ___ Justifica tu respuesta. ______________________

g) Completa la tabla para indicar dónde estaba el tráiler y qué hacía el chofer en las horas indicadas.

Hora	Lugar donde se encontraba	Actividad que llevaba a cabo
5:10		
8:00		
9:00		

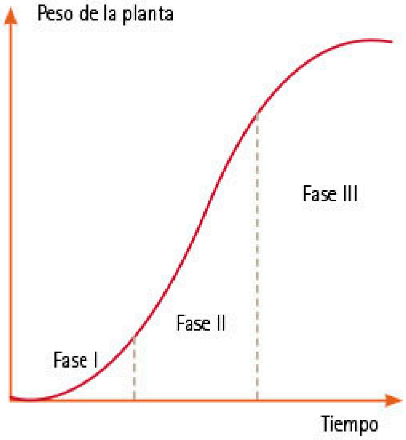
DESCUBRO MÁS
¿Cuál fue la velocidad promedio del tráiler durante el trayecto en que avanzó más rápido?

Compara tus resultados con los de tus compañeros. Comenten lo siguiente: ¿cómo puede averiguarse, a partir de la gráfica, en qué parte el tráiler avanzó más rápido y en cuál, más despacio?

Taller de matemáticas

1. Analiza la información y responde.

La gráfica representa, de manera simplificada, las etapas típicas de crecimiento de ciertos tipos de plantas. En el eje de las abscisas se indica el tiempo que transcurre, y en el de las ordenadas se indica el peso. Se distinguen tres fases que se han señalado con números romanos I, II y III.



Fuente: Facultad de Ciencias Agropecuarias, "Unidad temática 7: Crecimiento", en Universidad Nacional de Entre Ríos-Facultad de Ciencias Agropecuarias [en línea], disponible en ‹www.fca.uner.edu.ar/files/academica/deptos/catedras/WEBFV_2010/mat_did/UT7.pdf›, fecha de consulta: 10 de junio de 2018

a) Abajo se da la descripción de cada fase, pero en desorden. Anota el número de fase que corresponde a cada explicación y demuestra cómo lo supiste.

- Fase ___: el crecimiento es casi proporcional al tiempo, es decir, cada día (o semana), la planta crece casi lo mismo. ______________________
- Fase ___: el crecimiento de la planta disminuye de velocidad, es decir, cada día (o semana), la planta crece menos que el anterior. ______________________
- Fase ___: el crecimiento de la planta aumenta de velocidad, es decir, cada día crece más que el anterior. ______________________

b) ¿En qué fase se puede afirmar que la relación entre el peso de la planta y el tiempo transcurrido es de tipo lineal?

____

c) ¿En qué fase el peso de la planta tiende a estabilizarse, es decir, aumenta con el tiempo, pero cada vez más despacio?

____

d) ¿En qué fase el peso de la planta aumenta cada vez más rápido?

____

MÁS IDEAS

Hay varias maneras de estudiar el crecimiento de las plantas, unas prestan atención a la altura de la planta; otras, al número y tamaño de las hojas; algunas más, al peso… Cada método aporta información que complementa la de los otros.

MÁS IDEAS

Cuando una magnitud es proporcional a otra, la gráfica de la relación entre ambas es una línea recta.

SECUENCIA 24

Expresiones equivalentes de sucesiones II

Lección 72. Cenefas

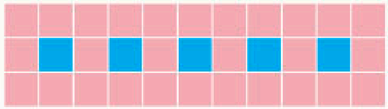
Aprendizaje esperado: verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

cenefa: elemento decorativo con forma de tira o franja alargada que tiene dibujos que se repiten.

1. Trabaja en equipo. Analicen la información y hagan lo que se pide.

Para decorar una pared, se colocará una cenefa con cuadrados rosas y azules, con un diseño como el que se muestra.

Adaptado de Sessa, C., *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*, Buenos Aires, Zorzal, 2005.



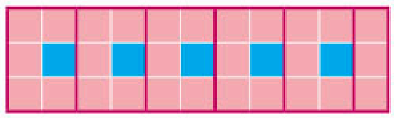
a) Anoten, en la tabla, el número de cuadrados rosas que tendrá una cenefa como la anterior, según el número de cuadrados azules que se coloquen.

Cuadrados azules	5	10	50	100	n
Cuadrados rosas	28				

b) Analicen los siguientes razonamientos para completar la última columna de la tabla anterior. Consideren que n representa el número de cuadrados azules.

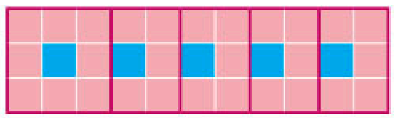
Razonamiento A

Cada cuadrado azul está rodeado de 5 rosas; es decir, para n cuadrados azules hay $5n$ cuadrados rosas; además, hay otros tres cuadrados rosas en el extremo derecho de la cenefa.



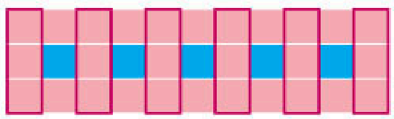
Razonamiento B

Para el primer cuadrado azul se necesitan 8 rosas, pero para los demás solo se requieren 5.



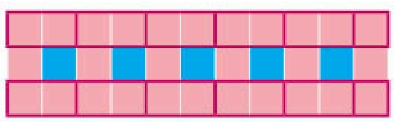
Razonamiento C

Si se marcan columnas de 3 mosaicos rosas, siempre hay una columna más que el número de mosaicos azules, es decir, se forman $n + 1$ columnas de cuadrados rosas. Además, hay que sumar 2 mosaicos rosas por cada azul.



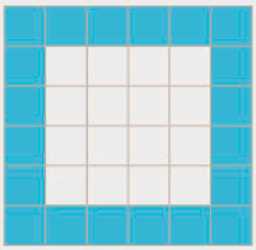
Razonamiento D

En la primera fila hay $2n + 1$ mosaicos rosas; lo mismo sucede en la tercera fila. En la fila central hay $n + 1$ mosaicos rosas.



DESCUBRO MÁS

Considera un cuadrado de 6 seis cuadritos de lado.



¿Cuántos cuadritos hay en el borde (azules)?
¿Cuántos cuadritos habrá en el borde de un cuadrado de 10 cuadritos de lado?
¿Y en uno de 35 cuadritos de lado?
¿Y para n cuadritos de lado?

c) Anoten, en la tabla, la letra del razonamiento (A, B, C o D) que le corresponde a cada expresión algebraica. De nuevo, n representa la cantidad de cuadrados azules.

Expresión para el número de mosaicos rosas	¿A qué razonamiento corresponde?
$2(2n + 1) + (n + 1)$	
$5n + 3$	
$8 + 5(n - 1)$	
$3(n + 1) + 2n$	

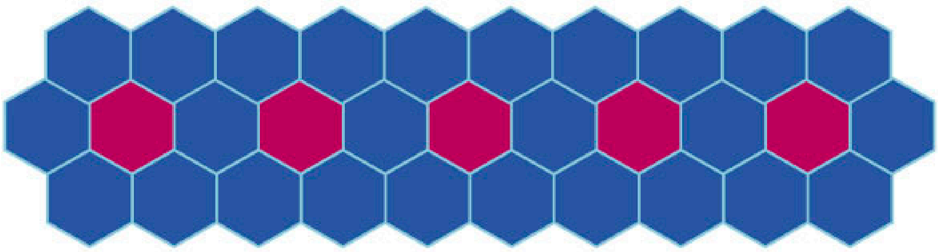
d) Simplifiquen las cuatro expresiones anteriores y muestren que son equivalentes.

Validen en grupo sus respuestas de la actividad anterior. Para el inciso a), expliquen cómo identificaron la relación entre las cantidades de cuadrados rosas y azules; para el b), comenten si alguno de los razonamientos se parece al que ustedes usaron; para el c), muestren cómo comprobaron la equivalencia de las cuatro expresiones.

MÁS IDEAS

Una manera de simplificar una expresión algebraica es resolver las operaciones y agrupar términos semejantes. Por ejemplo, la expresión $2(x + 1) - 2x$ se simplifica al multiplicar por 2 lo que está dentro del paréntesis y agrupar los términos con la literal x:
$2(x + 1) - 2x =$
$2x + 2 - 2x = 2.$

2. Considera la cenefa que se muestra.



a) Escribe dos expresiones diferentes, pero equivalentes, para calcular el número de hexágonos azules que se necesitan para n hexágonos rosas.

b) Anota, en tu cuaderno, los razonamientos que usaste para obtener las expresiones del inciso a). Verifica que las expresiones sean equivalentes.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo. Comenten los razonamientos que usaron para plantear las dos expresiones y la manera en que verificaron la equivalencia.

TIC MÁS Abre un archivo de GeoGebra y escribe, en la barra de entrada, lo siguiente:

Secuencia[(*n*, –3*n*), *n*, 1, 5]

¿Qué puntos aparecen en la pantalla?
¿Qué relación hay entre las coordenadas de esos puntos y la sucesión del inciso a)?
¿Qué sucede al cambiar el último 5 por otro número; por ejemplo, si escribes en la barra de entrada Secuencia[(*n*, –3*n*), *n*, 1, 10]?

DESCUBRO MÁS
¿En qué sucesiones de la tabla cada término es mayor que el anterior? ¿En cuáles sucede lo contrario?

Lección 73. Sucesiones con números negativos

1. Considera la siguiente sucesión de números y haz lo que se indica. Los puntos suspensivos indican que la sucesión continúa.

$$-3, -6, -9, -12, -15, \ldots$$

a) Observa que cada número ocupa un lugar en la sucesión.

Número de la sucesión	–3	–6	–9	–12	–15
Lugar que ocupa	1	2	3	4	5

b) Completa la tabla que contiene otros números de la sucesión anterior.

Número de la sucesión	–18	–30		–300	
Lugar que ocupa			51		*n*

c) Completa la tabla: para cada una de las sucesiones, escribe el número que ocupa el lugar indicado.

	Lugar								
	1	2	3	4	5	7	20	100	*n*
Sucesión A	–2	–4	–6	–8	–10				
Sucesión B	–8	–16	–24	–32	–40				
Sucesión C	–1	–3	–5	–7	–9				
Sucesión D	–10	–18	–26	–34	–42				
Sucesión E	–1	–5	–9	–13	–17				

Valida tus resultados con el resto del grupo. Comenten cómo calcularon los números faltantes en las tablas; en particular, los números en el lugar *n*. Analicen la información del recuadro.

2. Responde con base en la sucesión – 5, – 9, –13, –17, –21, ...

a) ¿Qué número ocupa el lugar 100 de la sucesión? ________________

b) Subraya las dos reglas generales que corresponden a la sucesión.

- $-4n - 1$
- $-4n + 1$
- $-(-4n - 1)$
- $-(4n + 1)$

Taller de matemáticas

1. Une, con una línea, cada regla general con la sucesión correspondiente.

a) $2n - 6$	$-1, -2, -3, -4, -5, \ldots$
b) $-5n$	$-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$
c) $-n$	$-4, -9, -14, -19, -24, \ldots$
d) $n - 15$	$-5, -10, -15, -20, -25, \ldots$
e) $-5n + 1$	$-14, -13, -12, -11, -10, \ldots$
f) $-2n + 3$	$1, -1, -3, -5, -7, \ldots$

2. Anota los primeros cinco términos de la sucesión que corresponde a cada regla general.

a) $\frac{1}{2}n + 1$: ____________________

b) $0.6 + 0.1n$: ____________________

c) $-n + 1$: ____________________

d) $-2n + 0.5$: ____________________

3. Considera la siguiente sucesión para responder:

$$-4, -7, -10, -13, -16, \ldots$$

a) Subraya las dos reglas que corresponden a la sucesión.

- $-3n + 1$
- $-3n - 1$
- $-(3n + 1)$
- $-(-3n + 1)$

b) ¿Qué número ocupa el lugar 15 de la sucesión? ____________________

c) ¿Y el lugar 100? ____________________

d) ¿Qué lugar corresponde al número −151? ____________________

e) ¿El número −92 pertenece a la sucesion? ____________________

f) ¿Cómo lo sabes? ____

____

____

____

TIC MÁS Aprende más sobre sucesiones en www.redir.mx/SCMM2-157a.

SECUENCIA 25

Construcción de polígonos III

Lección 74. Con tu juego de geometría

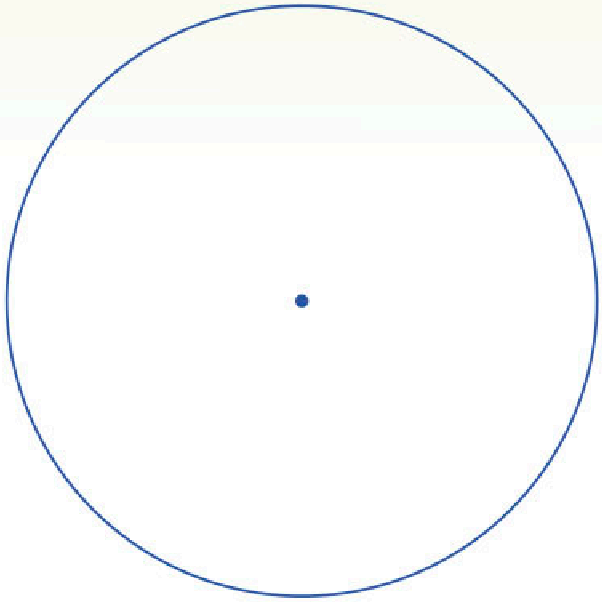
Aprendizaje esperado: deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

MÁS IDEAS
En la lección 55 aprendiste a qué se le llama *polígono inscrito en una circunferencia.*

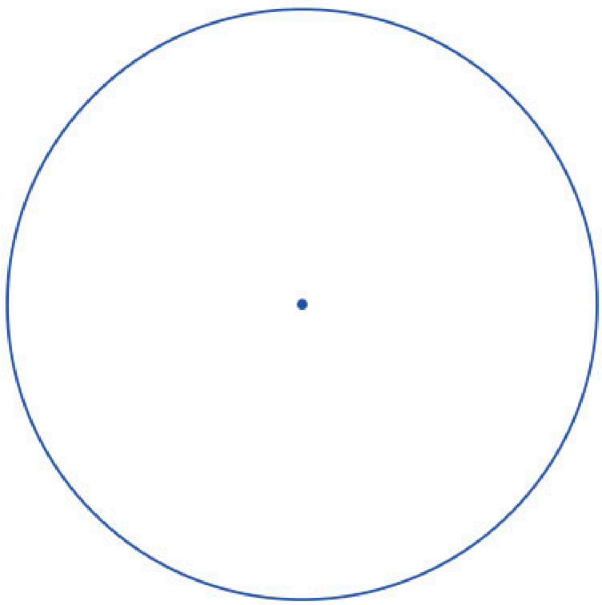
MÁS IDEAS
Lo que aprendiste en la secuencia 16 (Construcción de polígonos II) te será de utilidad para las actividades de esta lección y la siguiente.

1. Trabaja en pareja. Usen su juego de geometría para trazar, en cada circunferencia, el polígono inscrito que se indica.

Polígono inscrito: pentágono regular

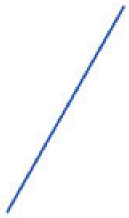


Polígono inscrito: octágono regular



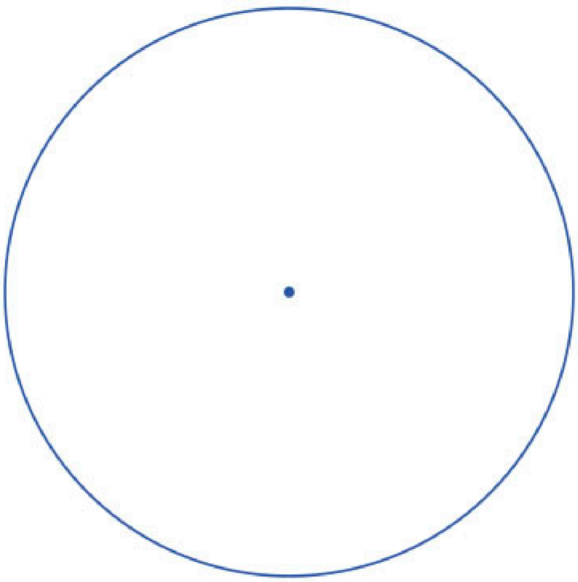
2. Tracen, en su cuaderno, un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono regular y un dodecágono regular, inscritos en circunferencias de 5 cm de radio.

3. El segmento trazado es un lado de un hexágono regular; traza el hexágono completo.



4. Traza en tu cuaderno un polígono regular de 9 lados (nonágono), en el que cada lado mida 4 cm.

5. Traza en la circunferencia que se muestra un polígono regular inscrito cuyo ángulo exterior mida 36°.



Valida, en grupo y con ayuda del profesor, tus respuestas de esta lección. Comenten lo siguiente y anoten en el cuaderno sus conclusiones.

- Si se conoce la medida del ángulo central de un polígono regular, ¿cómo se puede trazarlo? ¿Y si se conoce la medida del ángulo exterior?
- ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo central y la del ángulo exterior de un polígono regular? ¿Y entre la medida de un ángulo interior y la de uno exterior?
- ¿Cómo se traza un polígono regular a partir de la medida de uno de sus lados?

DESCUBRO MÁS

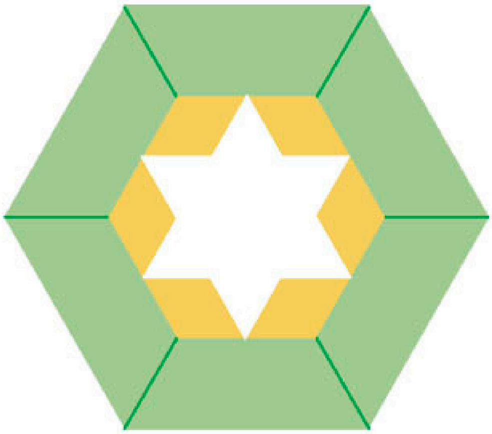
¿Se puede trazar con exactitud un polígono regular de 7 lados a partir de dividir 360° entre 7? ¿Por qué?

Lección 75. Diseños geométricos

1. Trabaja en equipo.

a) Elijan uno de los diseños, A y B, y reprodúzcanlo en una hoja blanca. Su reproducción debe ser más grande que el diseño original y tener colores diferentes.

Diseño A

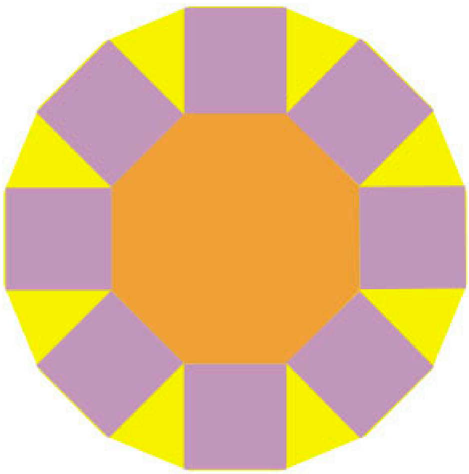


Diseño B

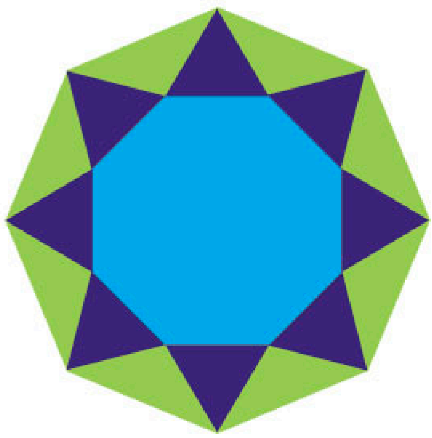
b) Elijan uno de los diseños, C y D, y reprodúzcanlo en una hoja blanca. Deben trazarlo de manera que el octágono central mida 3.5 cm de lado. Usen colores distintos a los que aquí se muestran.

TIC MÁS Abre un archivo de GeoGebra y usa las herramientas Polígono y Polígono regular para reproducir los diseños C y D.

Diseño C



Diseño D

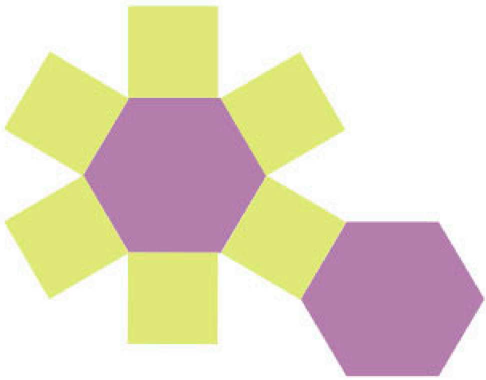


c) Inventen un diseño con polígonos regulares y trácenlo en una cartulina blanca. Coloréenlo a su gusto y presenten su trabajo al resto del grupo. Entre todos, elijan al equipo que inventó el mejor diseño.

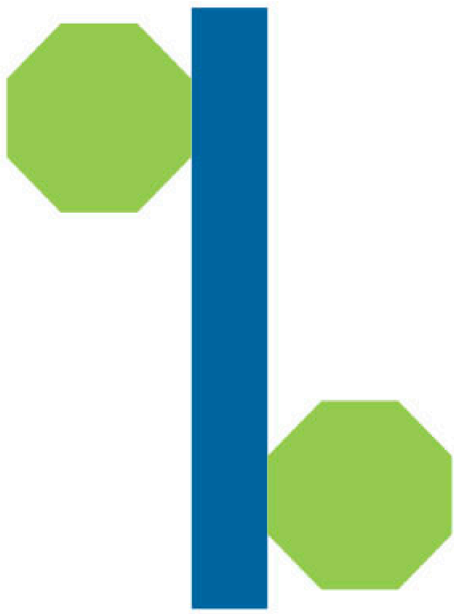
2. Analiza la información y responde o haz lo que se pide.

Las plantillas que se muestran sirven para construir cajitas de papel.

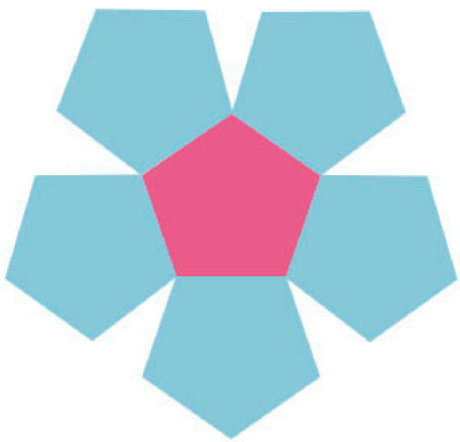
Plantilla 1



Plantilla 3



Plantilla 2



DESCUBRO MÁS

¿Cómo se llama el cuerpo geométrico que se forma con la plantilla 1? ¿Y el que se forma con la plantilla 3?

a) ¿Qué les falta a las plantillas para poder armar cajitas con ellas?

____

b) ¿Con qué plantilla se construye una caja que no tiene tapa? ______________

c) ¿Con qué plantilla se construye una caja de mayor volumen? ______________

d) Elige una plantilla y reprodúcela en cartulina; la reproducción debe ser más grande que la plantilla de este libro. Decide dónde poner las pestañas para poder armarla y pegarla. Si eliges una cajita con tapa, cuida que pueda abrirse.

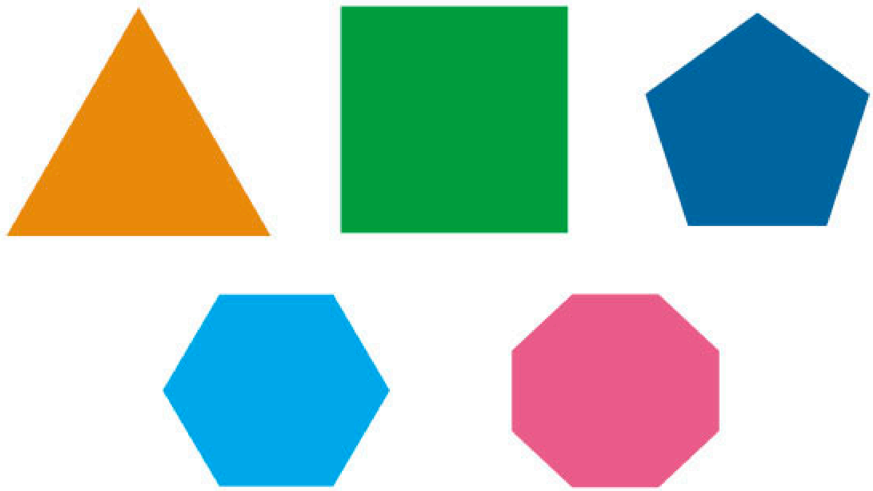
e) Decora y arma tu caja, y muéstrala a tus compañeros. Entre todos, elijan la que tenga el mejor diseño y la que esté mejor construida.

Lección 76. Mosaicos

1. Trabaja en equipo. Analicen la información y respondan o hagan lo que se pide.

recubrir el plano: cubrir cualquier superficie plana con un patrón de figuras, de manera que no queden espacios ni se encimen las figuras.

En una fábrica se producirán mosaicos con forma de polígonos regulares como los que se muestran.



a) Si se usa solo un tipo de figura, ¿con cuáles piensan que es posible cubrir una pared o un piso sin encimarlas ni dejar huecos? Márquenlas con una ✔.

b) ¿A qué suponen que se deba que con algunos polígonos sí es posible recubrir el plano y con otros no?

c) Calquen y recorten diez polígonos iguales a cada uno de los anteriores. Verifiquen si es posible recubrir el plano con copias de cada figura.

2. Completen la tabla y respondan.

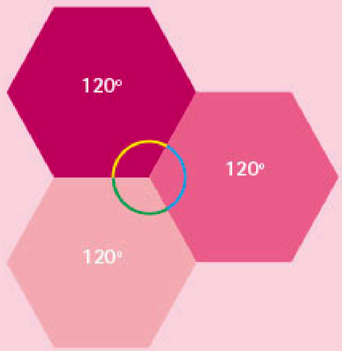
DESCUBRO MÁS
¿Con cualquier tipo de triángulo se puede recubrir el plano? ¿Por qué? ¿Y con un cuadrilátero cualquiera?

Polígono regular	Medida del ángulo interior	¿La medida del ángulo interior divide exactamente a 360°?	¿Sirve para recubrir el plano?
Triángulo equilátero			Sí
Cuadrado		Sí	
Pentágono regular			No
Hexágono regular		Sí	
Octágono regular			No

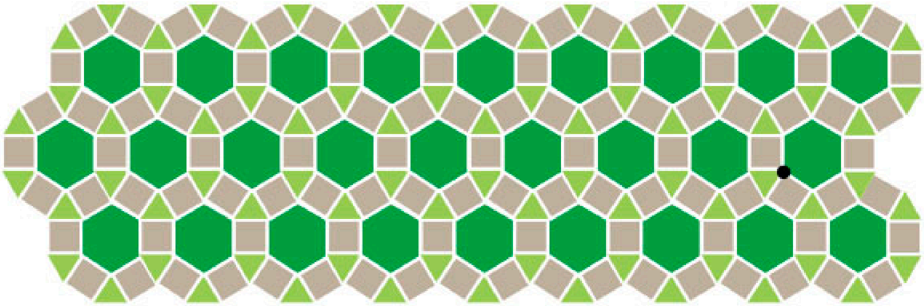
¿Cómo debe ser la medida del ángulo interior para que un polígono regular recubra el plano? ______________________________

Validen sus respuestas con el resto del grupo. Comenten la información del recuadro.

Para cubrir el plano con polígonos regulares iguales es necesario colocar alrededor de un vértice varias copias de la figura sin sobreponerlas ni dejar huecos. El ángulo total que formen debe medir 360°. Por ejemplo, los hexágonos encajan perfectamente porque sus ángulos interiores miden 120°, que es la tercera parte de 360°; así, si se colocan tres hexágonos juntos, se completan 360°.



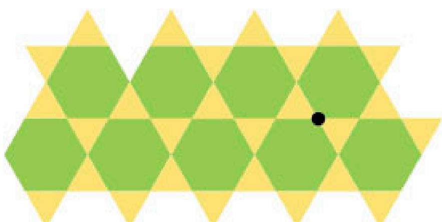
3. Responde con base en el diseño. Corresponde a un recubrimiento del plano con varios tipos de polígonos regulares.

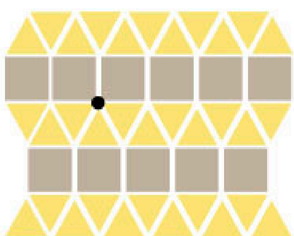


a) Identifica el punto negro. Completa la suma de las medidas de los ángulos que convergen en él. ______ + ______ + ______ + ______ = ______

Taller de matemáticas

1. Los polígonos regulares se combinan de varias maneras para recubrir el plano. Observa estos diseños.





a) Anota, debajo de cada figura, la suma de las medidas de los ángulos que convergen en el punto negro.

b) Traza, en tu cuaderno, un diseño con dos o más polígonos regulares que recubra el plano. Anota la suma de las medidas de los ángulos que convergen en un punto y verifica que sea igual a 360°.

MÁS IDEAS

Si quisieras recubrir el plano con octágonos regulares y copias de otro polígono regular, ¿cuál escogerías y por qué?

converger: coincidir o juntarse en un mismo lugar.

DESCUBRO MÁS

M. C. Escher (1898-1972) fue un artista gráfico holandés que usó ampliamente la geometría en su obra; en particular, para la creación de teselados. Investiga qué es un teselado y busca en internet ejemplos de la obra de Escher. Averigua también cómo crear teselados e inventa el tuyo.

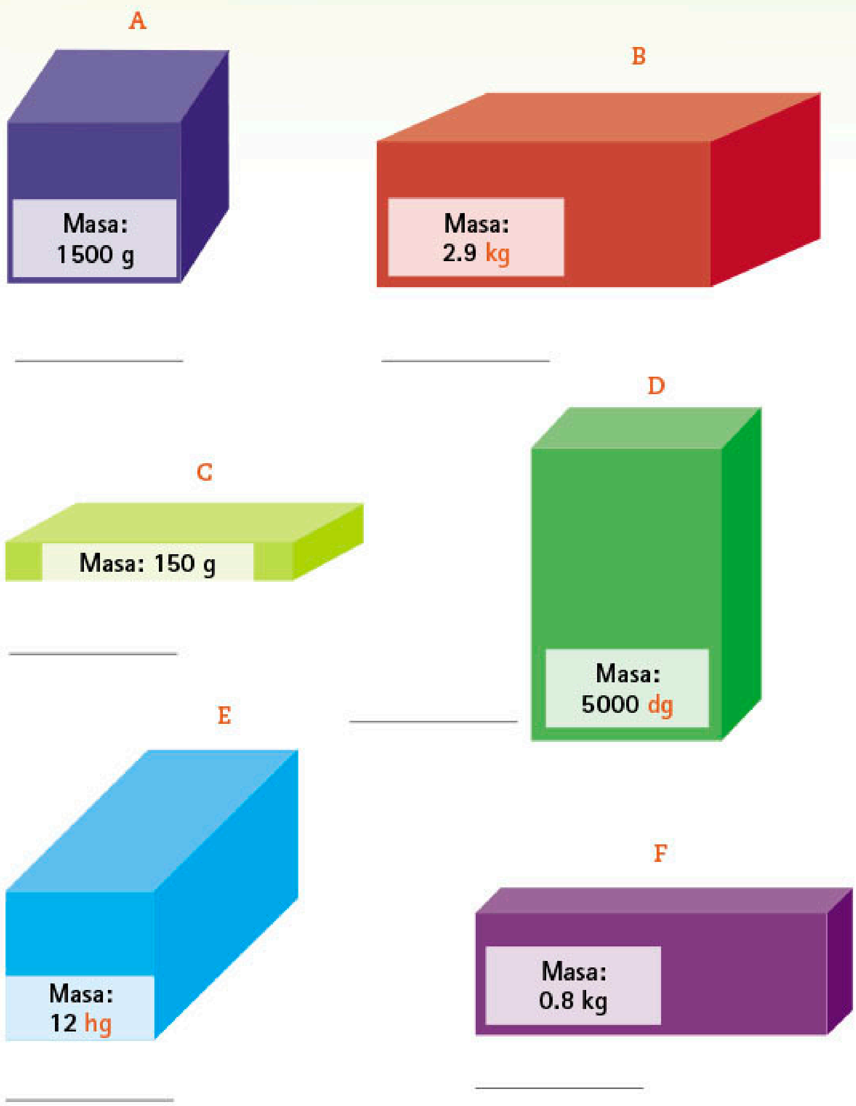
SECUENCIA 26

Conversión de medidas II

Lección 77. Masa, no peso

Aprendizaje esperado: resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

1. Ordena las cajas de menor a mayor masa. Anota 1 junto a la de menor masa, 2 junto a la que sigue, y así sucesivamente.

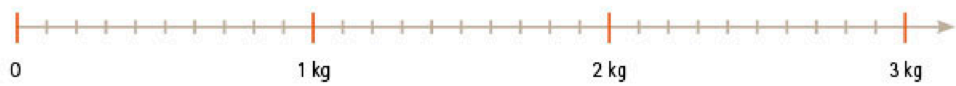


MÁS IDEAS

En realidad, lo que se mide con los kilogramos, gramos, etc., es la masa de un cuerpo, aunque por costumbre se le llame "peso".

kilogramo (kg): unidad que equivale a 1 000 gramos.
hectogramo (hg): unidad que equivale a 100 gramos.
decigramo (dg): décima parte de un gramo.

2. Ubica en la recta la masa de las cajas; anota la letra de cada caja junto a la marca correspondiente.



3. Completen la tabla en equipo. En la primera columna anoten una estimación de la masa en gramos. Para completar la segunda columna, consigan una báscula. En la tercera columna anoten la masa en kilogramos.

Objeto	Estimación de la masa en gramos	Masa en gramos	Masa en kilogramos
Su libro de matemáticas			
Su mochila con todos los útiles de un día			

4. Completen la tabla que muestra la masa que puede alcanzar un ejemplar adulto para cinco animales distintos.

Especie	Masa (kg)	Masa (t)
Elefante africano	7 000	
Elefante asiático		5.5
Hipopótamo	4 000	
Rinoceronte blanco		3.5
Jirafa	1 250	

tonelada: unidad que equivale a 1 000 kg. Su simbolo es t.

5. Respondan con base en la imagen.

a) ¿A cuánto equivale una libra (1 lb) en gramos?

1 lb = _____ g

b) ¿A cuánto equivale un kilogramo en libras?

1 kg = _____ lb

6. Trabajen en grupo.

- Consigan una báscula que esté graduada en kilogramos y en libras.
- Por turnos, alguno de ustedes coloque un objeto en la báscula y diga su masa en kilogramos; los demás deben calcular la masa en libras y anotarla en su cuaderno. Cuando todos hayan terminado, el alumno que usó la báscula dice el resultado en libras para validar las respuestas del grupo.
- Repitan varias veces el proceso con distintos objetos del salón.
- Intercambien las unidades de medida: el alumno que coloca el objeto dice su masa en libras y los demás deben anotarla en kilogramos.

Validen sus respuestas de esta lección. Comenten si sus estimaciones fueron buenas y den ejemplos de objetos con masas de 1 kg, 1 lb, y 1 g.

Lección 78. Grandes y pequeñas capacidades

hectolitro (hL): unidad que equivale a 100 litros.

kilolitro (kL): unidad que equivale a 1 000 litros.

decalitro (daL): unidad que equivale a 10 litros.

1. Considera los siguientes medios de almacenamiento de líquidos para responder.

Vagón cisterna

Longitud: 12.5 m
Capacidad: 81 500 L

Pipa de agua

Longitud de camión: 6.5 m
Altura del vehículo: 2.30 m
Capacidad: 70 hectolitros (hL)

Tanque esférico de almacenamiento industrial

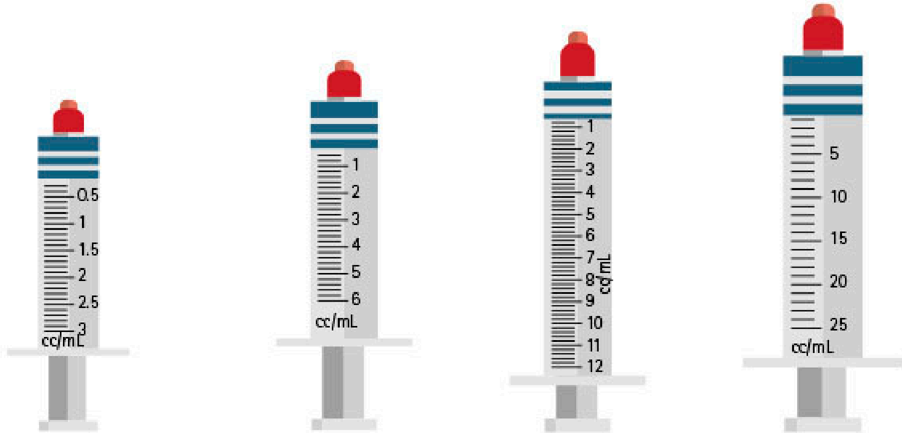
Radio de la esfera: 6 m
Capacidad: 904 kilolitros (kL)

a) Completa la tabla.

	Capacidad en...			
	litros (L)	decalitros (daL)	hectolitros (hL)	kilolitros (kL)
Vagón cisterna	81 500			
Pipa de agua			70	
Tanque de almacenamiento				904

b) ¿Cuántas veces es más grande la capacidad del vagón cisterna que la de la pipa de agua? ______________________ ¿Y la del tanque comparada con la del vagón cisterna? ______________________

2. Anota debajo de cada jeringa su capacidad en centilitros y en decilitros.



____ cL	____ cL	____ cL	____ cL
____ dL	____ dL	____ dL	____ dL

3. Resuelve los problemas.

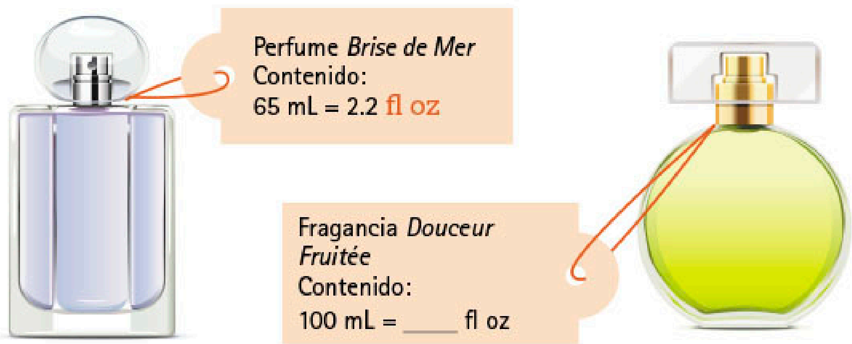
a) Un paciente requiere 20 miligramos de un medicamento, pero la medicina solo se vende como solución en presentación de 50 miligramos disueltos en 10 mililitros.

¿Cuántos mililitros de la mezcla debe tomar el paciente? ________________

b) En algunos países se usa la unidad de volumen cc (centímetro cúbico) en lugar de la unidad de capacidad mL (mililitro).

¿A cuántos mL equivale un cc? ________________________________

c) Anota el dato que falta en la etiqueta del perfume verde.



d) Un barril de petróleo equivale a 42 galones.

- Si 1 galón es aproximadamente 3.7 L, ¿cuántos litros de petróleo lleva un barco con 100 barriles del combustible? ____________________
- ¿Cómo se expresa en kilolitros la cantidad anterior? ________________

centilitro (cL): centésima parte de un litro.

decilitro (dL): décima parte de un litro.

miligramo (mg): milésima parte de un gramo.

solución (química): mezcla homogénea que resulta de disolver una sustancia sólida (soluto) en un líquido (disolvente).

mililitro (mL): milésima parte de un litro.

onza líquida (fl oz): unidad de capacidad utilizada con frecuencia en países de habla inglesa.

DESCUBRO MÁS

Estima cuántos mililitros caben en una cuchara sopera. Luego, consigue una jeringa como la de la actividad 2 y úsala para verificar si tu estimación fue buena.

MÁS IDEAS

La regla de tres que aprendiste en primer grado es otra manera de hacer conversiones. Por ejemplo, para convertir 8 litros a galones...

1 galón – 3.7 litros
x galones – 8 litros

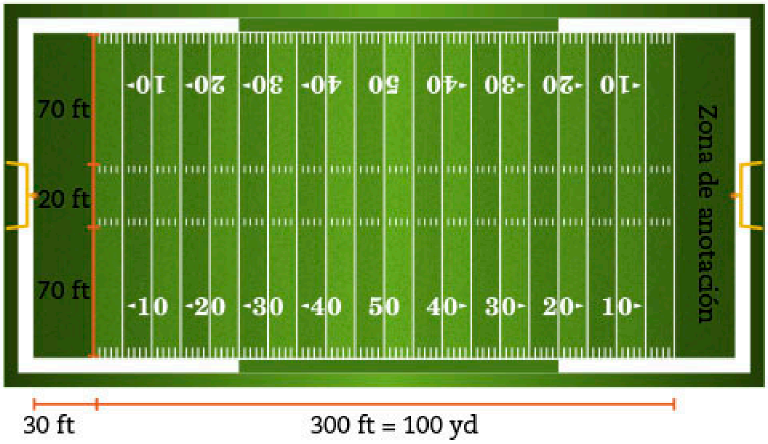
$x = \frac{1 \times 8}{3.7}$

$x = \frac{8}{3.7} \approx 2.162$ galones

Lección 79. Otras unidades de medida

1. Responde con base en la imagen de una cancha de futbol americano.

¿Qué canchas deportivas hay en tu comunidad? ¿Cuáles son sus dimensiones?



pie (ft): unidad de longitud que equivale a 30.48 cm.

yarda (yd): unidad de longitud que equivale a 91.44 centímetros.

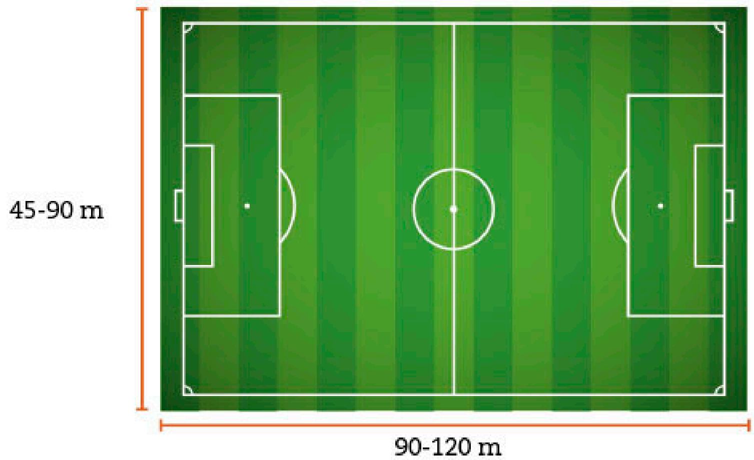
a) ¿A cuántos pies (ft) equivale 1 yarda (yd)? 1 yd = ______ ft

b) ¿Cuántas yardas mide de largo la cancha si se consideran ambas zonas de anotación? Largo de la cancha = ______ yd

c) ¿Cuántas yardas mide de ancho la cancha? ________

2. El ancho y el largo de una cancha de futbol *soccer* pueden variar entre los rangos indicados en la imagen.

MÁS LIBROS
Si te gustan los deportes y las matemáticas, lee *La fórmula preferida del profesor*, de Yoko Ogawa. El protagonista de esta novela es un matemático aficionado al beisbol que, tras sufrir un accidente, no puede retener información nueva por más de 80 minutos.



Considera la medida mayor que puede tener tanto de largo como de ancho una cancha de futbol *soccer*.

a) ¿Cuál es más larga, la cancha de *soccer* o la de americano? ________________

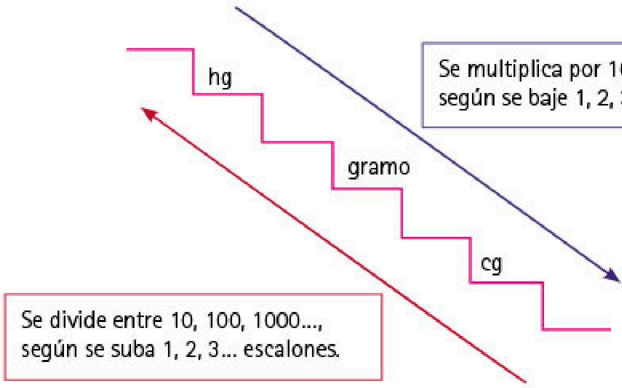
¿Por cuántos metros? ___________

b) ¿Cuál es más ancha? ___________ ¿Por cuántos metros? ________________

Valida tus respuestas con el resto del grupo. Corrijan si es necesario. Comenten qué procedimientos siguieron para hacer conversiones de una unidad de medida a otra.

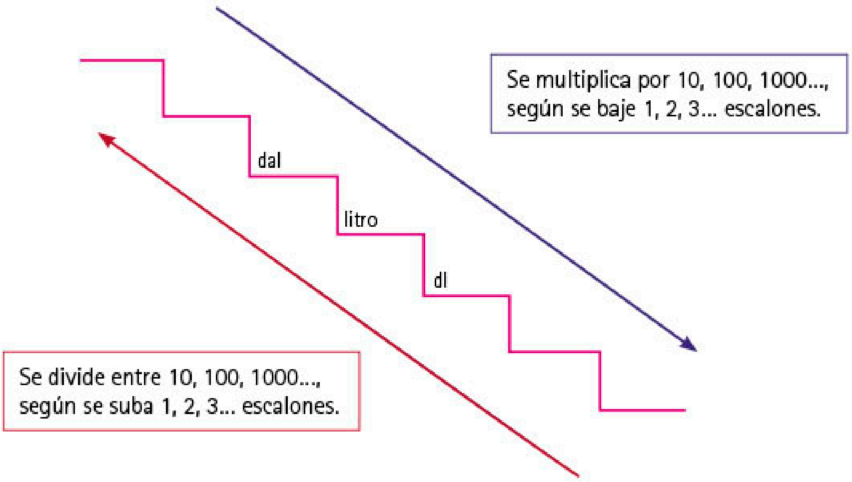
Taller de matemáticas

1. Completa la escalera anotando dag, dg, kg y mg en los peldaños correspondientes. Después, usa la escalera para hacer las conversiones que se indican.



- 4 mg = _____ g
- 18 hg = _____ g
- 934 g = _____ dag
- 8 kg = _____ g

2. Completa la escalera y utilízala para hacer las conversiones que se indican.



- 3 dL = _____ cL
- 4 kL = _____ L
- 3.2 hL = _____ kL
- 345 L = _____ daL

3. Haz las siguientes conversiones.

- $3\frac{1}{2}$ pulgadas = ________ cm
- 5 m = ________ yd
- 4.5 galones = ________ L
- 70 kilogramos = ________ libras

MÁS IDEAS

Algunas unidades con las que has trabajado en las secuencias de conversión de medidas (secuencias 17 y 26) pertenecen al Sistema Internacional de Unidades, que se usa en casi todos los países del mundo y se abrevia "SI". Algunas unidades básicas de este sistema son: para la longitud, el metro (m); para la masa, el kilogramo (kg); para el volumen, el metro cúbico (m^3); para la capacidad, el litro (L).

Otras unidades con las que trabajaste en esta secuencia y la 17 pertenecen al Sistema Inglés de unidades, por ejemplo, la yarda, la onza, la libra, el pie, etcétera.

DESCUBRO MÁS

Al trabajar con múltiplos y submúltiplos de las unidades del SI, quizá habrás notado que se escriben con los prefijos "kilo", "hecto", "deca", "deci", "centi" y "mili". ¿Qué significa cada uno de estos prefijos?

pulgada (in): unidad de longitud que equivale a 2.54 cm.

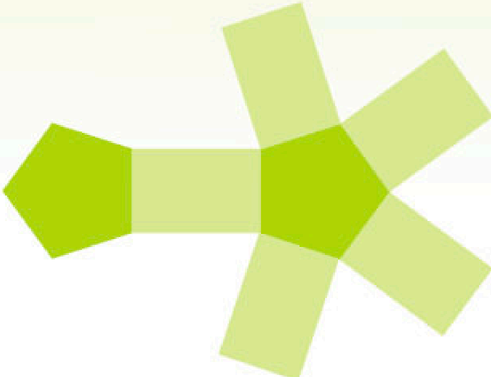
SECUENCIA 27

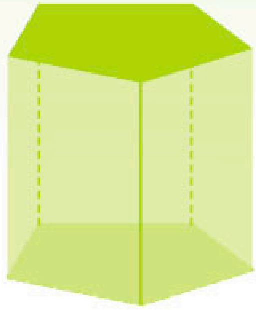
Volumen de prismas II

Lección 80. Desarrollos planos

Aprendizaje esperado: calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

1. Imagina que se armará un prisma recto pentagonal. Las imágenes muestran el desarrollo plano que se usará y cómo se verá el cuerpo ya formado. Usa tu regla graduada para obtener o calcular las medidas que se piden en la tabla.





área lateral de un prisma: suma de las áreas de las caras laterales.

área total de un prisma: suma de las áreas de todas las caras del prisma.

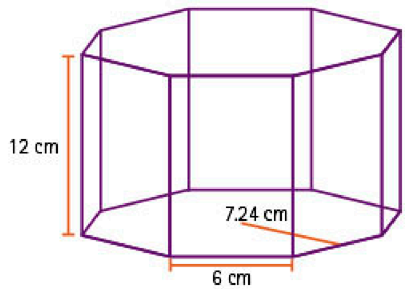
Medidas reales del desarrollo plano	Medidas que tendrá el prisma
Un lado del pentágono: ________	Altura: ________
Perímetro del pentágono: ________	Área lateral: ________
Apotema: ________	Área total: ________
Área del pentágono: ________	Volumen: ________

Valida, con tus compañeros y con ayuda del profesor, tus resultados. Comenten cómo encontraron el centro del pentágono para trazar la apotema y si obtuvieron más o menos la misma medida.

2. Trabaja en equipo.

a) Analicen el prisma octagonal y anoten las medidas que se piden.

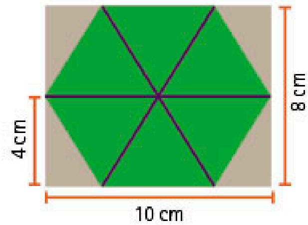
- Perímetro de la base: ____________
- Área de la base: _________________
- Área lateral del prisma: _________
- Área total del prisma: ___________
- Volumen del prisma: ____________

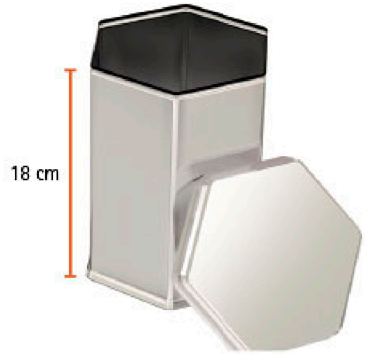


b) Tracen en cartulina el desarrollo plano del prisma anterior. Comenten dónde deben poner pestañas para poder pegarlo. Recorten, armen y peguen el prisma.

3. Resuelvan el problema.

Hernán guarda café molido en una caja metálica con forma de prisma hexagonal.





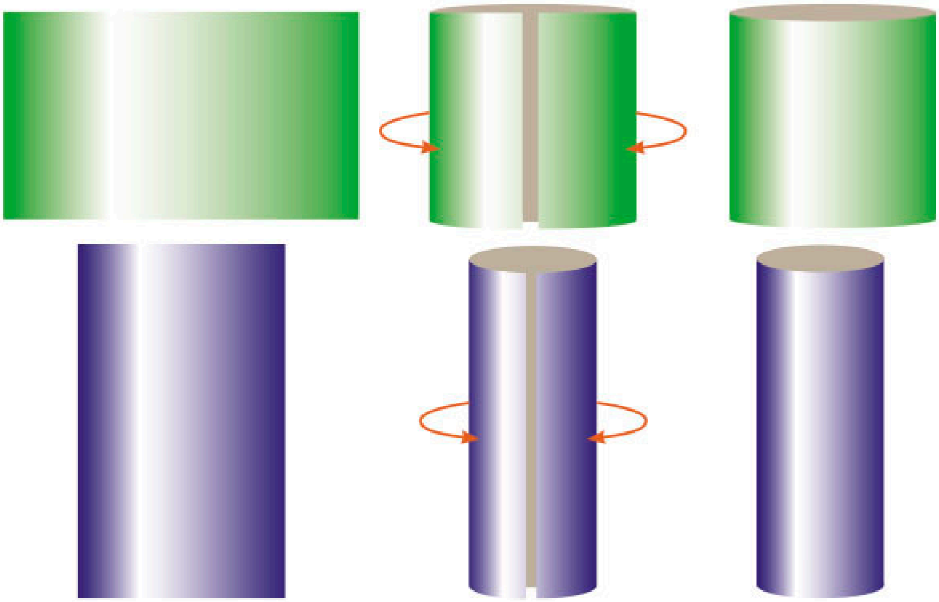
a) Calculen el área del hexágono. Consideren que los seis triángulos de la base son congruentes.

Área de la base: ___________

b) Si el café ocupa 80% del volumen de la caja, ¿cuántos gramos de café hay en el recipiente? (Considera que la masa de 1 cm^3 de café es 0.5 gramos).

En la caja hay __________ g de café.

4. Consigan una hoja de papel tamaño carta. Con ella pueden hacer dos cilindros diferentes.



a) Sin hacer cálculos, ¿estiman que ambos cilindros tendrán el mismo volumen? Justifiquen su respuesta.

	Cilindro verde	Cilindro azul
Altura del cilindro (cm)		
Radio de la base (cm)		
Área de la base (cm^2)		
Volumen (cm^3)		

b) ¿Qué cilindro tiene mayor volumen? ______________________

Comparen, con ayuda del maestro, sus resultados de las actividades 2, 3 y 4. Discutan qué relación habría entre el volumen del cilindro verde y el del azul si el largo de la hoja fuera el doble que el ancho.

DESCUBRO MÁS

En la actividad 3, ¿qué criterio de congruencia de triángulos permite asegurar que los seis triángulos de la base hexagonal son congruentes?

DESCUBRO MÁS

¿Cuál es, de acuerdo con la actividad 3, la densidad del café molido?

MÁS IDEAS

En la lección 69 aprendiste a qué se le llama "densidad de un material".

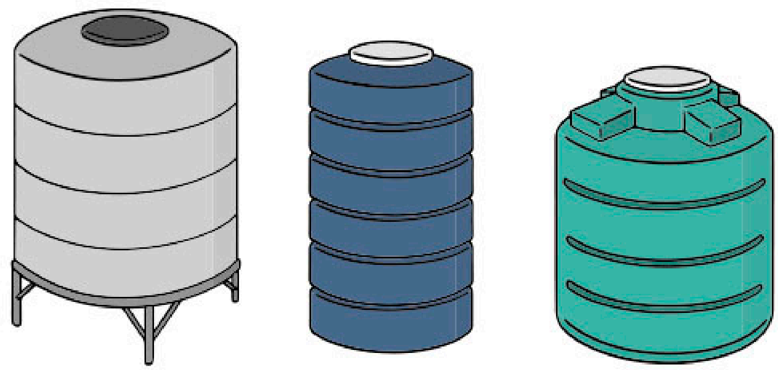
Lección 81. Relación entre volumen y capacidad

MÁS IDEAS
En cursos anteriores aprendiste que en un volumen de 1 dm³ cabe 1 L.

1. Trabaja en equipo. La jeringa que se muestra tiene una graduación de 0 a 10 mililitros (ml).

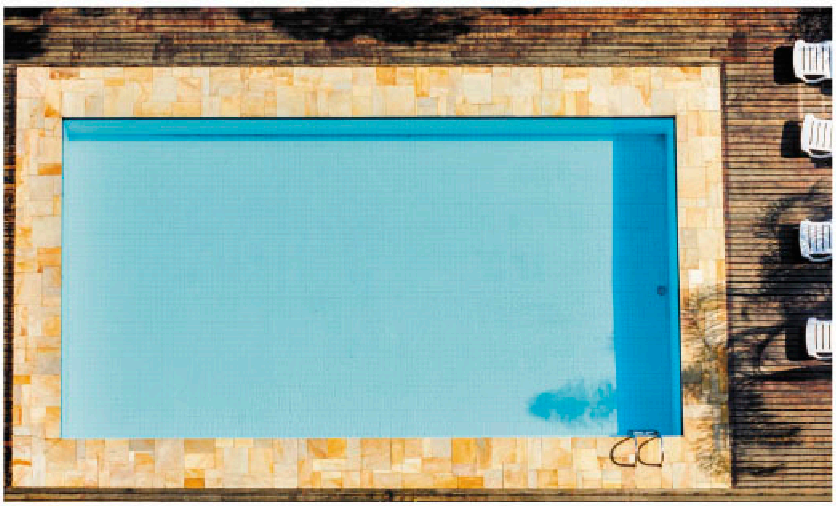
Si la parte graduada de la jeringa mide 10 cm de largo, ¿cuánto mide el radio de la misma? ______________

2. En una tienda venden tinacos para agua como los que se muestran. Anoten las cantidades que faltan.



	Modelo A	Modelo B	Modelo C
Capacidad (L)	______	373	893
Diámetro (m)	1.10	______	1.20
Altura (m)	1.16	1.32	______

3. Analicen la información y respondan.



Una piscina mide 5 m de ancho, 10 m de largo y 1.5 m de profundidad.

a) Si la alberca está vacía, ¿cuántos litros de agua se necesitan para llenarla?

____

b) Para llenar la alberca, se usará una manguera de la que salen 30 litros de agua por minuto. ¿En cuántas horas se llenará?

____

Con apoyo del profesor, comparen sus resultados con los de otros equipos. Comenten por qué, en los recipientes cilíndricos, aunque solo se consideran dos dimensiones (radio y altura), el volumen que les cabe se mide en unidades cúbicas.

Taller de matemáticas

1. Resuelve los problemas. Considera 3.14 como valor de π.

a) Una vela se consume a razón de 2 cm^3 cada 3 minutos.

¿Cuántas horas tardaría en consumirse una vela como la que se muestra, que mide 5 cm de diámetro y 5 cm de altura?

____

b) Tres velas como las que se muestran se encenderán al mismo tiempo. La altura de las velas chicas mide 8 cm y la base mide 5 cm de lado; para la vela grande, la altura mide 10 cm y la base, 7 cm de lado.

- ¿Después de cuántas horas se apagarán las velas chicas? ______________
- ¿Cuánto tiempo durará encendida la vela grande? ______________
- ¿Cuántos cm^3 de cera se habrán consumido al terminarse las tres velas?

____

c) Una caja de refrescos mide 32.4 cm de largo, 21.6 cm de ancho y 8 cm de altura. Contiene 24 latas de igual tamaño; cada una mide 5.4 cm de diámetro y 12 cm de altura.

Como las latas son cilíndricas, quedan espacios vacíos entre ellas. ¿Cuánto mide en total el espacio vacío dentro de la caja?

____

DESCUBRO MÁS

La vela A tiene el doble de radio que la B y ambas tienen la misma altura. ¿Cuántas veces más tarda en consumirse A que B?

SECUENCIA 28

Histogramas y polígonos de frecuencia

Lección 82. Agrupar datos

Aprendizaje esperado: recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

1. Discutan en grupo la siguiente situación.

Para una investigación sobre el crecimiento, se midieron las estaturas de 3500 jóvenes. Al recolectar los datos, se encontraron estaturas que van desde 1.35 m hasta 1.80 m.

¿Cómo conviene organizar los datos: en tablas o en gráficas y de qué tipo?

2. Midan las estaturas de todo el grupo y completen la tabla (si es necesario, agreguen intervalos).

Intervalo de estatura (m)	Frecuencia	Intervalo de estatura (m)	Frecuencia
De 1.30 a 1.39		De 1.50 a 1.59	
De 1.40 a 1.49		De 1.60 a 1.69	

Comenten por qué los datos de la tabla anterior se agruparon en intervalos. Después, analicen en grupo la información del recuadro.

MÁS IDEAS
¿En qué casos resulta práctico agrupar los datos en intervalos?

Los datos de la tabla anterior están agrupados; es decir, en lugar de registrar el número de alumnos que hay por cada estatura (1.30 m, 1.31 m, 1.32 m...), se definieron intervalos de estaturas (1.30 m-140 m; 1.40 m-1.50 m, etc.).

El número menor de cada intervalo se denomina *límite inferior*; mientras que el número mayor es el *límite superior*. Por ejemplo, para el intervalo 1.30 m-1.39 m, el límite inferior es 1.30 m y el superior, 1.39 m.

A la diferencia entre dos límites inferiores consecutivos se le llama *amplitud de intervalo*.

3. Responde las preguntas referentes a la tabla de la actividad anterior.

a) ¿Cuál es el límite inferior del tercer intervalo? ____________ ¿Y el superior? ____________

b) Si alguien mide 1.60 m, ¿en qué intervalo queda? ______________________

c) ¿Algún intervalo es más grande que otro?

____

d) Sustituye los valores y resuelve:

límite inferior del intervalo 2 menos límite inferior del intervalo 1 =

_______ – _______ = _______

e) Verifica que en la tabla de la actividad 2 todos los intervalos tienen la misma amplitud.

4. Trabaja en grupo. Midan la longitud de un pie de cada compañero y registren los datos en la tabla. Si es necesario, agreguen intervalos.

Medida del pie (cm)	Frecuencia		
De 20.6 a 22.5			
De 22.6 a 24.5			
De 24.6 a 26.5			
De 26.6 a 28.5			
De 28.6 a 30.5			

a) ¿Cuántos intervalos necesitaron para registrar en la tabla los datos de todo el grupo? ___

b) ¿Cuál es el límite inferior del cuarto intervalo? ___

c) ¿Cuál es el límite superior del segundo intervalo? ___

d) ¿Cuál es la amplitud de todos los intervalos? ___

5. Trabaja en equipo. En la tabla se registraron las estaturas de los alumnos de un grupo de 2º grado.

Intervalo de estatura (cm)	Frecuencia
De 130 a 139.9	3
De 140 a 149.9	9
De 150 a 159.9	8
De 160 a 169.9	5
De 170 a 179.9	1

MÁS IDEAS

El alumno de mayor estatura mide entre 170 cm y 179.9 cm, pero no es posible saber su altura exacta a partir de los datos en la tabla.

a) Respondan con base en la tabla anterior. Si consideran que alguna pregunta no se puede responder, márquenla con un ✘.

- ¿Cuánto mide el alumno más alto?
- ¿Y el más bajo?
- ¿En qué intervalo están la mayoría de las estaturas? ___
- ¿Cuántos alumnos del grupo miden 1.57 m?

b) ¿Cómo harían una gráfica que relacione los intervalos con sus frecuencias? Hagan una propuesta y escríbanla en su cuaderno.

Revisen sus respuestas de la actividad anterior. En particular, revisen si coinciden en qué preguntas no se pueden contestar con la información de la tabla. Comenten también sus propuestas para graficar los datos de la tabla.

Lección 83. Un nuevo tipo de gráfica

1. En la lección anterior trabajaste con la siguiente tabla y, en grupo, propusieron algunas maneras de graficar los datos. Ahora conocerás otra manera de hacerlo.

Intervalo de estatura (cm)	Frecuencia
De 130 a 139	3
De 140 a 149	9
De 150 a 159	8
De 160 a 169	5
De 170 a 179	1

a) Analiza la información del recuadro y completa la tabla que aparece después.

DESCUBRO MÁS
Si no se conocen los límites de los intervalos, pero sí los puntos medios, ¿es posible calcular la amplitud del intervalo? Si tu respuesta es "sí", explica cómo; si es "no", explica por qué.

El *punto medio* de cada intervalo se calcula así:

$$\text{Punto medio} = \frac{\text{límite inferior del intervalo} + \text{límite superior del intervalo}}{2}$$

Intervalo de estatura (cm)	Punto medio	Frecuencia
De 130 a 139	$\frac{130+139}{2} = \frac{269}{2} = 134.5$	3
De 140 a 149		9
De 150 a 159		8
De 160 a 169		5
De 170 a 179		1

Estatura de los alumnos del grupo 2° A

b) Con los puntos medios y las frecuencias se hizo la gráfica que se muestra. Verifica que los puntos medios (en el eje horizontal) coincidan con los que calculaste.

c) Analiza la información del recuadro para entender cómo se construyó la gráfica anterior.

Para hacer un polígono de frecuencias...

- se trazan dos ejes perpendiculares. En el eje horizontal se ubican, separados a distancias iguales, los puntos medios de cada intervalo; en el eje vertical se colocan las frecuencias respectivas.
- se localizan los puntos que tienen como coordenadas el punto medio de cada intervalo (abscisa) y la frecuencia respectiva (ordenada).
- al inicio de la gráfica se agrega un punto que tiene como abscisa el punto medio anterior al primero y frecuencia igual a cero. Al final de la gráfica se agrega un punto que tiene como abscisa el punto medio posterior al último y frecuencia igual a cero.
- se unen todos los puntos con segmentos de recta.

2. Analiza la información y responde.

El polígono de frecuencias muestra los resultados de una competencia de salto de longitud entre los alumnos de 2° A y 2° B de una escuela. Los datos están agrupados; es decir, los números 100, 120, 140, etc., son los puntos medios de los intervalos respectivos.

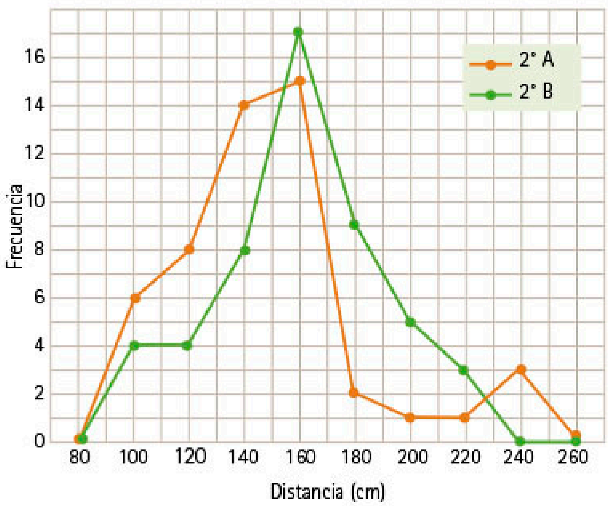
a) ¿Cuál es la amplitud de los intervalos? ____________

b) ¿Cuántos alumnos de 2° A participaron? ______ ¿Y de 2° B? ____________

c) ¿Qué grupo logró el salto de mayor longitud? ____________

d) ¿Qué grupo tuvo un mejor desempeño? ____________ ¿Por qué? ____________

Resultados de la competencia



DESCUBRO MÁS

¿Puede saberse, a partir de la gráfica, cuánto saltó cada alumno o cuál fue el menor salto?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Discutan qué grupo tuvo el mejor desempeño en la competencia de salto de longitud; puede haber opiniones diferentes, pero deben argumentarlas. Organicen, en la próxima clase de Educación Física, una competencia de salto de longitud y hagan lo siguiente.

- Registren los resultados y agrúpenlos en una tabla. Determinen sus intervalos y su amplitud; no olviden calcular los puntos medios.
- Tracen el polígono de frecuencias respectivo.
- Comparen sus resultados contra los de los grupos de la actividad 2 y comenten quién habría ganado de haber competido juntos.

TIC MÁS Aprende más sobre polígonos de frecuencia en www.redir.mx/SCMM2-177a.

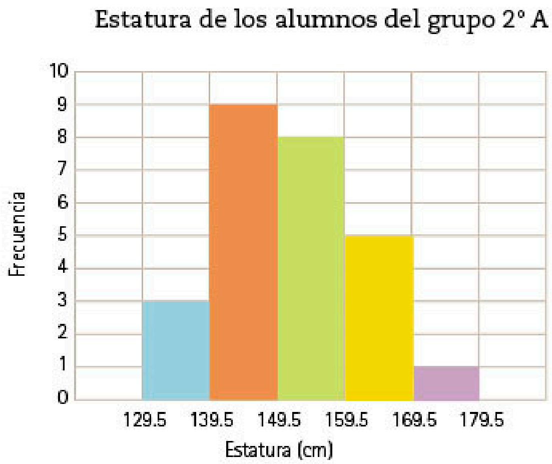
Lección 84. Histogramas

1. Una vez más trabajarás con los datos de esta tabla.

Intervalo de estatura (cm)	Punto medio	Frecuencia
De 130 a 139	134.5	3
De 140 a 149	144.5	9
De 150 a 159	154.5	8
De 160 a 169	164.5	5
De 170 a 179	174.5	1

DESCUBRO MÁS
Si se tiene el histograma de un conjunto de datos, ¿cómo se puede trazar el polígono de frecuencias respectivo?

A continuación se muestra un polígono de frecuencias y un histograma. Ambas gráficas representan los mismos datos.



Responde de acuerdo con las gráficas.

a) ¿En qué se parecen? ______________________________

____

b) ¿En qué son diferentes? ______________________________

____

c) ¿Qué dato se anota en el eje horizontal del polígono de frecuencias?

____

d) ¿Y en el del histograma? ______________________________

____

MÁS IDEAS
Para responder la pregunta d), analiza los límites de los intervalos y busca la relación que tienen con los números que aparecen en el eje horizontal del histograma.

Valida tus respuestas con el resto del grupo. En particular, analicen cómo se determinan los datos del eje horizontal en un histograma. Comenten la información del recuadro.

Un *histograma* es muy parecido a una gráfica de barras, pero, a diferencia de esta, no se debe dejar espacio entre las barras. Sus características son las siguientes.

- En el eje vertical se anotan las frecuencias.
- En el eje horizontal se anotan las *fronteras de intervalo*, que son el punto medio entre el límite superior de un intervalo y el límite inferior del siguiente. Por ejemplo, en el histograma de la página anterior, la tercera frontera es $\frac{149 + 150}{2} = \frac{299}{2} = 149.5$.
- Se trazan barras cuya base es la distancia entre dos fronteras, y su altura es la frecuencia.

2. En la tabla se registra el tiempo, en minutos, que les tomó a varias personas correr 1 km.

Tiempo (min)	Frecuencia
De 1 a 3	0
De 4 a 6	1
De 7 a 9	5
De 10 a 12	7
De 13 a 15	3
De 15 a 18	1

Elabora, en tu cuaderno, un polígono de frecuencias y un histograma con los datos anteriores.

Compara tus gráficas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo necesario.

Taller de matemáticas

1. Trabaja en grupo. Registren el tiempo que cada uno tarda en correr 1 km (puede ser en la escuela o en casa, como tarea). Decidan cómo agrupar los datos y elaboren un histograma. Sobre este, tracen el polígono de frecuencias correspondiente.

2. Organícense en equipos. Lleven a cabo lo siguiente.

   a) Elijan un tema para investigar.
   b) Diseñen un cuestionario (con no más de tres preguntas). Pueden incluir opciones de respuesta.
   c) Revisen con el profesor que las preguntas sean claras y precisas.
   d) Determinen a cuántas personas aplicarán el cuestionario.
   e) Aplíquenlo.
   f) Organicen la información y decidan cómo presentarla. Incluyan tablas y gráficas.
   g) Presenten sus resultados al grupo.

TIC MÁS Aprende más sobre histogramas en www.redir.mx/SCMM2-179a.

SECUENCIA 29

Datos estadísticos II

Lección 85. La altura de un poste

Aprendizaje esperado: usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

1. Analiza la información y responde.

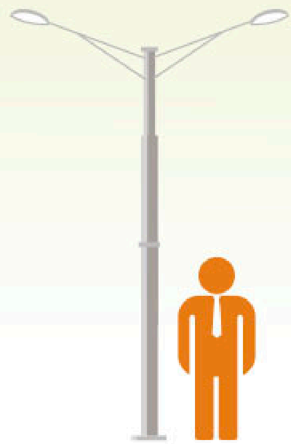
   a) Si la persona ubicada junto al poste mide 1.80 m, ¿cuál es la altura aproximada del poste?

   ____

   b) ¿Cómo calculaste la altura del poste? ______________________

   ____

   ____



2. Trabaja en equipo. Discutan cómo podrían calcular de manera indirecta la altura de un poste, es decir, sin medirlo. Anoten sus conclusiones.

   ____

   ____

3. Dos equipos de alumnos midieron, de diferentes maneras, la altura de un poste. Los resultados de las medidas, en metros, fueron los siguientes.

Medidas obtenidas por el equipo A					
4.8 m	4.9 m	5.0 m	5.1 m	5.1 m	5.1 m

Medidas obtenidas por el equipo B					
4.0 m	4.1 m	4.8 m	5.2 m	5.9 m	6.0 m

   a) Expliquen cuál piensan que es la medida real del poste.

   ____

   ____

   b) ¿Qué equipo consideran que hizo mediciones más precisas? Argumenten su respuesta.

   ____

   ____

Comparen sus respuestas y argumentos con los de sus compañeros de grupo. Para el inciso a) de la actividad 3, comenten si para determinar la altura del poste usaron alguna medida de tendencia central (media aritmética, mediana o moda) y argumenten por qué. En el caso del inciso b), expliquen en qué se fijaron para determinar el equipo que hizo mediciones más precisas y comenten si usaron el rango de cada conjunto de datos.

rango: diferencia entre el dato mayor y el dato menor del conjunto.

4. Trabaja con un compañero.

Otros dos equipos de alumnos midieron el mismo poste de la actividad 3 y encontraron los siguientes resultados.

Medidas obtenidas por el equipo C					
4.7 m	4.7 m	4.7 m	5.3 m	5.3 m	5.3 m

Medidas obtenidas por el equipo D					
4.7 m	4.9 m	5.0 m	5.0 m	5.1 m	5.3 m

a) Calculen el promedio y el rango de los datos obtenidos por cada equipo.

b) ¿Qué equipo consideran que hizo mediciones más precisas? Argumenten su respuesta.

c) Para responder el inciso anterior, dos alumnos plantearon lo siguiente:

Francisco:
Yo considero que los dos equipos hicieron mediciones igual de precisas, pues ambos conjuntos de datos tienen el mismo rango e igual promedio.

María:
Las medidas de ambos equipos tienen el mismo rango e igual promedio. Sin embargo, las medidas del equipo D están mejor distribuidas (no están tan cargadas hacia los extremos). Yo pienso que el equipo D hizo mediciones más precisas.

d) ¿Con quién están de acuerdo y por qué?

DESCUBRO MÁS
Si el dato mayor de un conjunto es 4.3 y el rango es 0.5, ¿la media aritmética de los datos puede ser 3.6? ¿Por qué?

Comparen sus respuestas y opiniones con las de sus compañeros de grupo. Analicen la información del recuadro.

Una manera de comparar la precisión en las mediciones consiste en considerar el rango de las medidas obtenidas al medir varias veces el mismo objeto. Saber que con un método se obtiene menor rango de medidas que con otro puede ser indicador de que es más preciso, pero la limitante del rango es que solo tiene en cuenta los valores extremos sin considerar los otros datos que hay entre ellos.

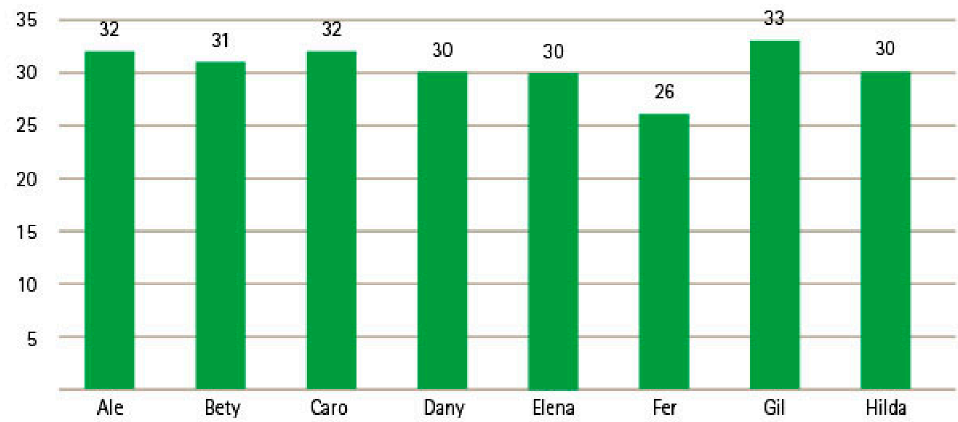
Lección 86. La báscula más precisa

1. Trabaja en pareja. Respondan con base en la información.

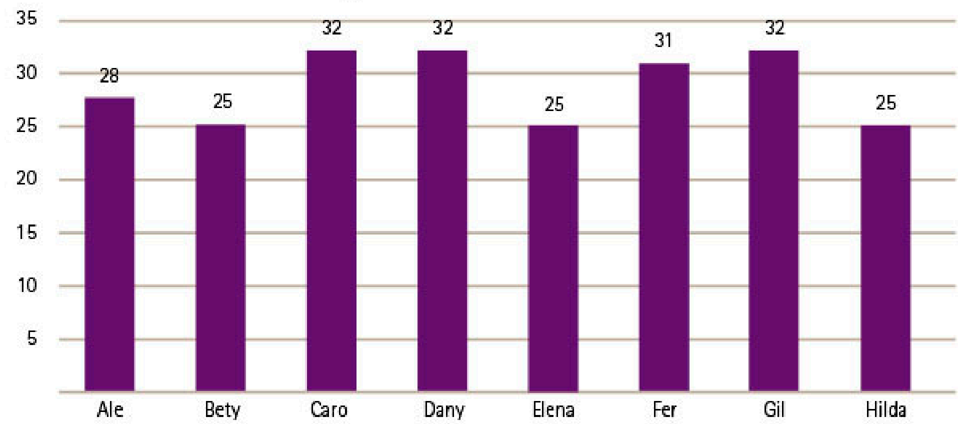
Ocho personas pesaron, de manera independiente, un objeto usando dos básculas. Como las básculas no eran igual de precisas y siempre hay errores de medición (por ejemplo, se puede leer mal lo que indica la báscula), las personas registraron diferentes medidas con cada báscula. Los resultados obtenidos se muestran en las gráficas.

DESCUBRO MÁS
Sin hacer cálculos (solo viendo las gráficas), ¿con qué báscula estimas que se obtuvo la menor masa promedio?

Masa en gramos obtenida con la báscula A



Masa en gramos obtenida con la báscula B



a) ¿Cuál piensan que es la masa real del objeto y por qué?

____

____

____

b) ¿Qué báscula consideran que es más precisa y por qué?

____

____

____

2. Hagan lo que se pide para determinar qué báscula de la actividad anterior es más precisa. Pueden usar calculadora.

a) Calculen la media aritmética de cada conjunto de datos.

	Masas obtenidas con la báscula A	Masas obtenidas con la báscula B
Media aritmética		

b) Calculen, para cada báscula, la distancia de cada masa a la media aritmética correspondiente.

Báscula A								
Masa (g)	32	31	32	30	30	26	33	30
Distancia a la media aritmética								

Báscula B								
Masa (g)	28	25	32	32	25	31	32	25
Distancia a la media aritmética								

MÁS IDEAS

La distancia entre dos números se calcula con una resta y siempre es una cantidad positiva; por ejemplo, la distancia entre 5 y 8 es 8 – 5 = 3, y no 5 – 8 = –3.

c) Calculen, para cada báscula, la media aritmética de las distancias anteriores. A este dato le llamaremos *desviación media*.

	Báscula A	Báscula B
Desviación media		

d) ¿Qué báscula consideran que es más precisa y por qué? ______________________

____

____

____

Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Observen que la desviación media es una medida que indica qué tan dispersos están los datos. Verifíquenlo comparando la gráfica de cada báscula con su desviación media. Comenten la información del recuadro.

DESCUBRO MÁS

Si la media aritmética de un conjunto de datos es 45 y la desviación media es 6.5, ¿significa que todos los datos están entre 45 + 6.5 y 45 – 6.5?

Un instrumento de medición es más preciso que otro si los resultados obtenidos con el primero tienen menor *dispersión* (están menos alejados unos de otros) que los que se obtienen al hacerlo con el segundo.

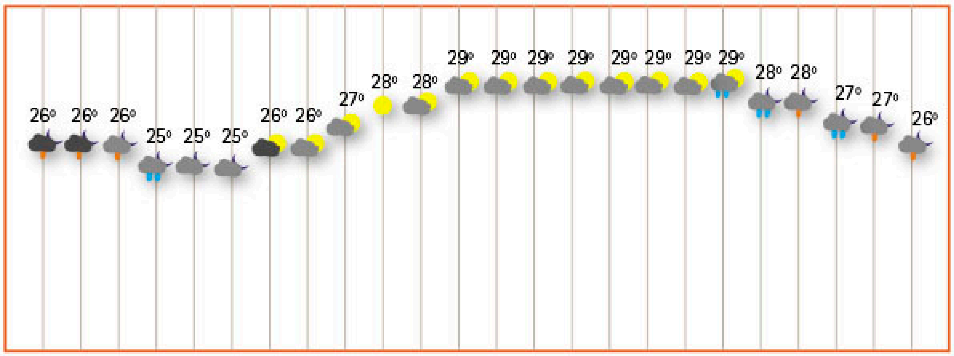
La *desviación media* indica qué tan dispersos están los datos respecto a su media aritmética. Para obtener el valor de la desviación media se calcula la distancia de cada dato respecto a la media aritmética, y luego se obtiene el promedio de las distancias.

Lección 87. ¿Qué tan dispersos están los datos?

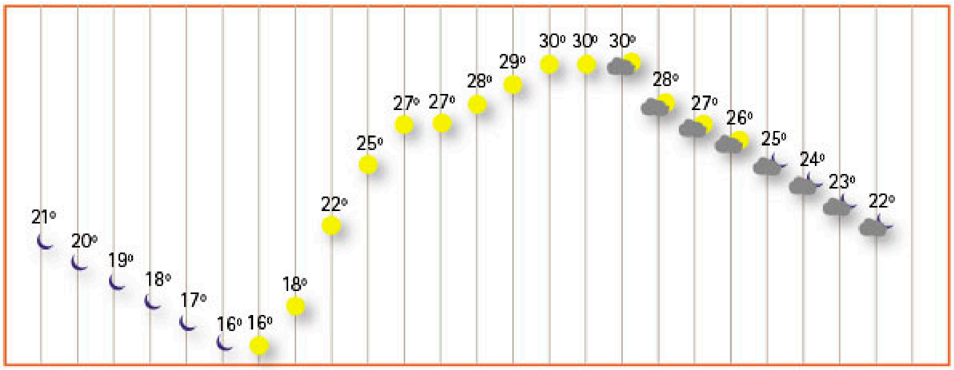
1. Analiza la información y responde.

Las gráficas muestran la temperatura a lo largo de un día en tres ciudades de México.

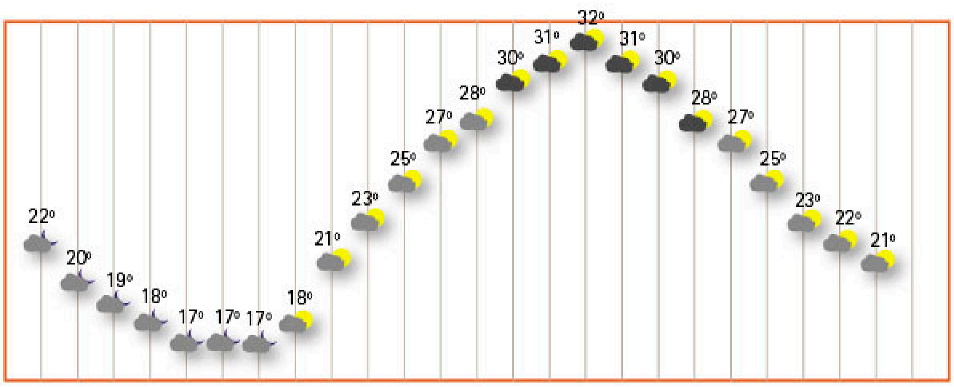
Veracruz



Saltillo



León



DESCUBRO MÁS

¿Cuál es la temperatura promedio para cada ciudad? ¿Y el rango de temperatura?

a) Sin hacer cálculos (solo con ver las gráficas), ¿qué ciudad piensas que tiene temperatura más estable (menos dispersa)? ____________________

b) ¿Qué ciudad tiene menor dispersión de temperatura respecto a su media aritmética? ____________ ¿Y cuál tiene la mayor dispersión? ____________

2. Los seis grupos de una escuela evaluaron a cinco profesores. Las calificaciones que dio cada grupo se muestran en la tabla.

		Calificación del profesor...				
		Juan	María	Pedro	Celia	Imelda
Grupo	1°A	8	7	10	8	7
	1°B	8	6	6	10	8
	2°A	7	6	9	10	7
	2°B	6	10	8	7	7
	3°A	6	7	7	8	8
	3°B	10	9	8	8	8
	Promedio					

a) Completa la tabla anterior anotando la calificación promedio de cada profesor.

b) ¿Cuál es la media aritmética de los cinco promedios? ______________________

c) ¿Cuál es la desviación media? ______________________

d) Los profesores cuya calificación promedio sea mayor que la media aritmética general más la desviación media recibirán un bono extra.

¿Quiénes recibirán el beneficio? ______________________

Taller de matemáticas

1. Investiga, con ayuda del profesor, las calificaciones de tu grupo para el primero y segundo periodo de evaluación.

   a) ¿En qué periodo obtuvieron mejor calificación como grupo? ______________________

   b) ¿En qué periodo las calificaciones tuvieron menor dispersión? ______________________

2. Investiga algún dato numérico de los compañeros de tu grupo (edad, número de hermanos, tiempo que usan el celular diariamente, número de horas que duermen, etcétera).

   a) Calcula lo siguiente para los datos que recabaste.

      - Las medidas de tendencia central (media, mediana y moda): ______________________
      - El rango: ______________________
      - La desviación media: ______________________

   b) Presenta tus resultados en una gráfica y muéstrala al resto del grupo.

TIC MÁS Aprende más sobre la dispersión de un conjunto de datos en www.redir.mx/SCMM2-185a.

SECUENCIA 30

Azar y probabilidad II

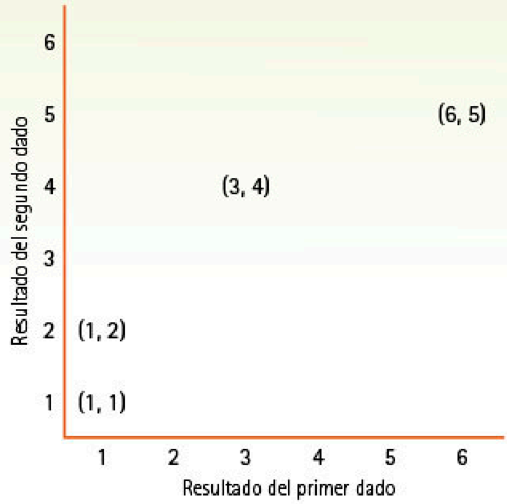
Lección 88. Probabilidad teórica y probabilidad frecuencial

Aprendizaje esperado: determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

MÁS IDEAS
En la lección 28 aprendiste a qué se le llama *espacio muestral* de un experimento.

1. Trabaja con un compañero.

   a) Completen el espacio muestral del lanzamiento de dos dados. Cada par de números es un evento posible diferente a los demás, por ejemplo, el par (2, 5) es diferente al par (5, 2).



   b) ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? ___________

   c) Consideren los eventos A, B y C para el lanzamiento de ambos dados.

   - Evento A: "Caen dos números pares".
   - Evento B: "Salen dos números impares".
   - Evento C: "Se obtiene un número par y otro impar".

   d) ¿Cuántos elementos del espacio muestral corresponden al evento A? _____ ¿Cuántos corresponden al evento B? _____ ¿Y para el evento C? _____

MÁS IDEAS
Siempre que se lanzan dos dados, el espacio muestral incluye las 36 maneras en que pueden caer ambos. Si pensamos en dados de dos colores, por ejemplo, rojo y negro, "dado rojo cae en 1 y dado negro en 5", es diferente que "dado rojo cae en 5 y dado negro en 1".

2. Hagan 50 lanzamientos de dos dados y registren los resultados en la tabla. Después, contesten o hagan lo que se indica.

Evento	Recuento	Frecuencia absoluta	Probabilidad frecuencial	Probabilidad teórica
A: dos números pares				
B: dos impares				
C: un par y un impar				

   a) Expliquen, en su cuaderno, cómo obtuvieron la probabilidad teórica y la frecuencial de cada evento.

   b) Comparen sus resultados de la columna "Probabilidad frecuencial" con los de otras parejas. ¿Son iguales? _____ ¿A qué creen que se debe? ___________

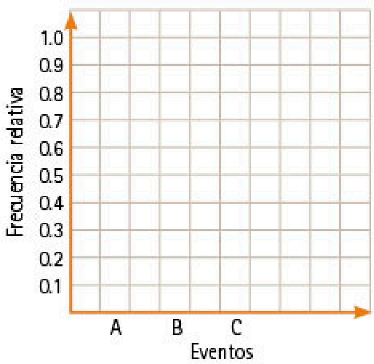
   ____

Con ayuda del profesor, revisen sus resultados en las actividades 1 y 2. Comenten qué relación hay entre la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial.

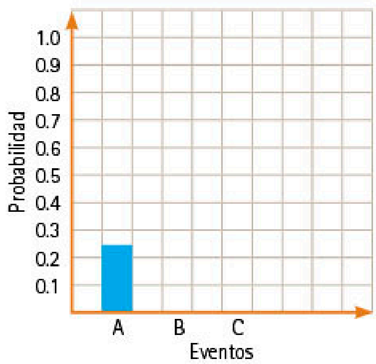
3. Trabaja con el mismo compañero con el que resolviste las actividades 1 y 2. Contesten o hagan lo que se indica.

a) Terminen de construir las gráficas de los eventos A, B y C.

Probabilidad frecuencial



Probabilidad teórica



b) Expresen con porcentaje la probabilidad teórica del evento…

- A: ________
- B: ________
- C: ________

DESCUBRO MÁS

Si la probabilidad del evento A está a la mitad entre 0.2 y 0.3, ¿cuál es esa probabilidad? ¿Cómo se expresa esa probabilidad en porcentaje? ¿Y con una fracción?

DESCUBRO MÁS

¿Cuánto suman los porcentajes que calculaste en la actividad 3? ¿Por qué se obtiene esa suma?

4. En la primera columna de la tabla aparecen los posibles resultados de la suma de puntos, cuando se lanzan dos dados. Hagan nuevamente 50 lanzamientos y registren los resultados.

Suma de puntos	Recuento	Frecuencia absoluta	Probabilidad frecuencial	Probabilidad teórica
2				$\frac{1}{36}$
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

MÁS IDEAS

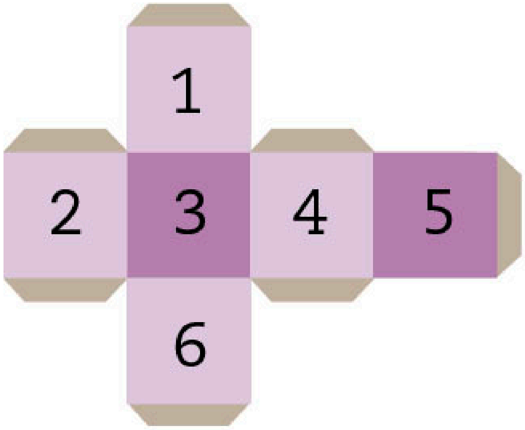
Para un evento dado, la probabilidad experimental o frecuencial puede variar, pero la teórica no.

a) ¿Cuál es la suma con mayor probabilidad teórica? _____

b) ¿Es la misma que tiene mayor probabilidad frecuencial? ________________

Lección 89. Eventos no igualmente probables

1. Traza en cartulina una plantilla como la que se muestra para construir un dado. Considera lo siguiente.



- Cada arista debe medir 1.5 cm.
- Antes de formar el dado, pega, en la parte posterior de una de las caras, un objeto pequeño y de poco peso (un botón, por ejemplo).
- Pega el cuerpo.
- Has construido un dado trucado o "cargado".

a) ¿Detrás de qué número pegaste la moneda? ___________________

trucar: disponer o preparar algo para que produzca un efecto distinto del habitual.

b) Escribe, en tu cuaderno, una hipótesis sobre lo que sucederá al lanzar varias veces el dado que construiste.

MÁS IDEAS
En la lección 45 aprendiste el significado de la palabra *hipótesis*.

2. Para confirmar tu hipótesis, reúnete con un compañero y lancen al menos 20 veces los dados que construyeron (cada quien el suyo). Registren, en su cuaderno, los resultados de cada dado y anoten también una conclusión.

DESCUBRO MÁS
¿Cuánto suman dos caras opuestas del dado que construiste?

a) Al momento de armar el dado, ¿detrás de qué número hay que pegar el objeto pequeño para que el número 1 caiga con más frecuencia que los demás?

____

b) Expliquen por qué, con un dado trucado como el que construyeron, no es pertinente usar la probabilidad teórica.

3. Trabaja en equipo. Distribuyan el trabajo para lanzar 100 veces un dado trucado y registrar los resultados en la tabla.

Evento	Recuento	Frecuencia absoluta	Probabilidad frecuencial
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Validen en el grupo sus respuestas. Comenten las diferencias entre jugar con un dado normal y uno trucado. Den más ejemplos de experimentos de azar en los que no es pertinente usar la probabilidad teórica.

Taller de matemáticas

1. Trabaja en equipo. Consideren el experimento de lanzar un dado (no trucado) como el que se muestra, con doce caras numeradas del 1 al 12.

 a) Definan tres eventos que correspondan al experimento mencionado.

Evento A: ________

Evento B: ________

Evento C: ________

 b) Calculen y anoten la probabilidad de cada evento.

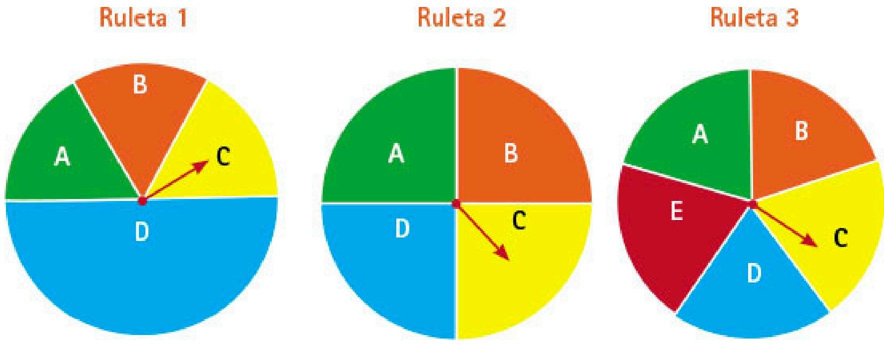
- P(A) = ________
- P(B) = ________
- P(C) = ________

 c) Consideren los siguientes eventos relacionados con el mismo experimento y calculen las probabilidades que se indican.

D: sale un 8.
E: sale un múltiplo de 5.
F: sale un número mayor que 12.

- P(D) = ________
- P(E) = ________
- P(F) = ________
- P($\overline{F}$) = ________

2. En un puesto de feria hay tres ruletas.



 a) Si la ruleta se detiene en la zona A, se gana un premio. ¿Con cuál de las tres conviene jugar? ________ ¿Por qué? ____

____

 b) ¿Cuál es la probabilidad de que la ruleta se detenga en la zona D para la...

- ruleta 1? ________
- ruleta 2? ________
- ruleta 3? ________

MÁS IDEAS

Para economizar la escritura, en lugar de "Probabilidad del evento A" se escribe simplemente "P(A)".

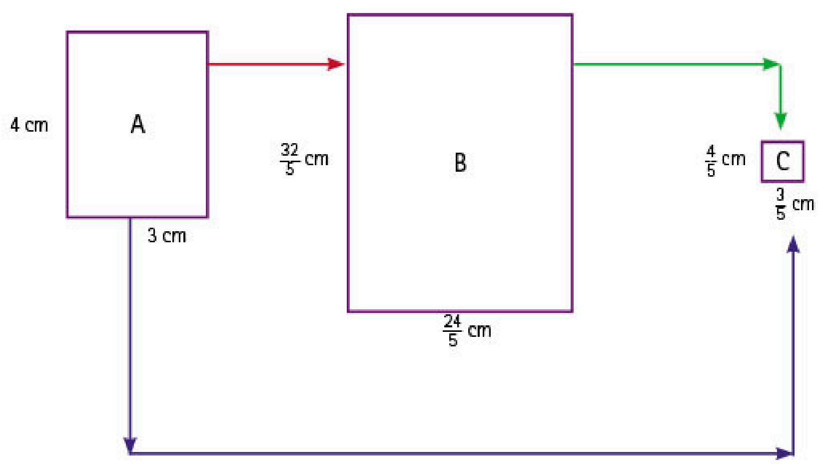
múltiplos de 5: en el conjunto de los números naturales, son los números que se obtienen al multiplicar 5 por otro número natural (1, 2, 3, 4...); es decir, los múltiplos de 5 son 5, 10, 15, 20... De manera más general (en el conjunto de los números enteros), los múltiplos de un número son aquellos que se obtienen al multiplicar dicho número por otro entero; por ejemplo, ... −9, −6, −3, 0, 3, 6, 9... son múltiplos de 3.

Primer periodo (Secuencias 1-10)

1. En la tabla se muestran la longitud, la tarifa de uso y el costo por kilómetro de algunas autopistas del país. Analiza los datos y anota las cantidades que faltan (redondea a dos cifras decimales).

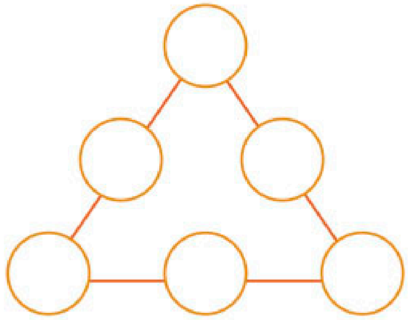
Autopista	Longitud (km)	Tarifa de uso ($)	Costo por kilómetro
Supervía Poniente	5.24	30.02	
La Venta-Chamapa		68.00	4.79
Perote-Banderilla y Libramiento de Xalapa	59.60		4.34
Circuito Exterior Mexiquense	86.86	329.19	
Tijuana-Tecate		107.00	3.59
México-La Marquesa	22.00		3.36
Viaducto Bicentenario	22.00	72.16	
Tlaxcala-San Martín Texmelucan		62.00	3.19
Ecatepec-Pirámides	22.21		3.15
Peñón-Texcoco	16.17	42.04	

2. Los rectángulos A, B y C están a escala. Anota, sobre la flecha roja, el factor por el que se multiplican las medidas de A para obtener las de B; sobre la flecha verde, el factor para pasar de B a C; y sobre la azul, el factor para pasar de A a C.



¿Por qué factor se multiplican las medidas del rectángulo C para obtener las de A? ______________________

3. Anota dentro de cada círculo uno de los siguientes números: –12, –8, –2, 1, 4, 6. El producto de los tres números en cada lado del triángulo debe ser –48.



4. Anota, en cada recuadro, el signo de operación (+, –, ×, ÷) que hace verdadera la igualdad.

a) (4.05) ☐ (–0.01) = –405

b) (–4.05) ☐ (0.01) = –4.04

c) (–4.05) ☐ (–0.01) = –4.04

d) (–4.05) ☐ (–0.01) = 0.0405

5. Resuelve los problemas.

a) Para hacer pintura de color anaranjado, se mezclan 15 L de pintura amarilla, 8 L de pintura roja y 2 L de pintura blanca. ¿Cuántos litros de cada color de pintura hay que mezclar para obtener 10 L de pintura anaranjada?

____

b) Un cuadrado y un rectángulo tienen la misma área. Los lados del rectángulo están en razón de 9:1; es decir, por cada centímetro que tiene el ancho, el largo tiene 9.

Si el perímetro del rectángulo es 200 cm, ¿cuánto mide un lado del cuadrado?

____

c) Una caja llena con barras de chocolate iguales pesaba 2 kg, pero al quitar 8 barras, el peso de la caja disminuyó a 1.5 kg.

¿Cuántas barras de chocolate había en la caja llena?________________

d) Si Paul lee 5 páginas por día, terminará de leer una novela en 28 días. ¿En cuánto tiempo terminaría si leyera…

- 10 páginas por día? __________
- 2 páginas por día? __________

Explica si la relación entre las páginas leídas por día y los días necesarios para terminar de leer la novela es directamente proporcional o inversamente proporcional.

____

____

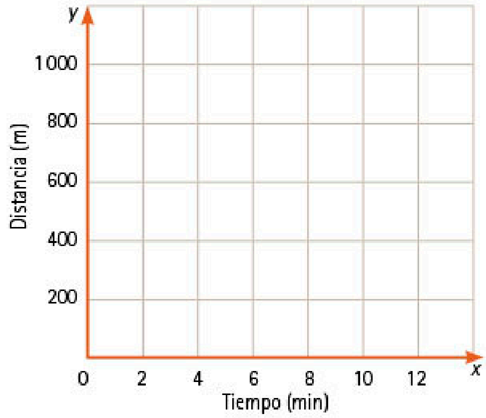
6. Analiza la información y haz lo que se pide.

Para ir caminando de su casa a la escuela, Ana Victoria recorre 200 m cada 2 minutos.

a) Completa la tabla.

Tiempo en minutos (x)	Distancia en metros (y)
2	
	400
	800
10	

b) Traza la gráfica correspondiente.

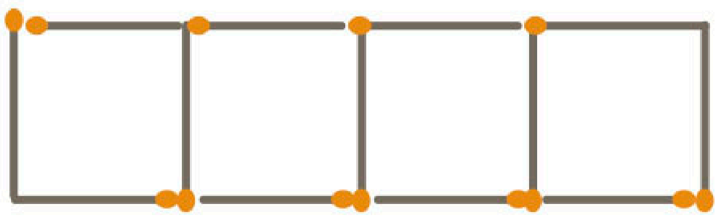


c) Subraya la expresión algebraica que relaciona la distancia (y) con el tiempo (x).

- $y = \frac{100}{x}$
- $y = 200x$
- $y = \frac{200}{x}$
- $y = 100x$

7. Responde con base en la información.

La expresión $3n + 1$ permite conocer la cantidad de cerillos que se necesitan para construir una figura con n cuadrados como la siguiente.



a) ¿Cuántos cerillos se necesitan para hacer una figura con 25 cuadrados?

____

b) ¿Cuántos cuadrados hay en la figura que se forma con 334 cerillos?

____

c) ¿Se puede formar una figura de cuadrados como las anteriores con 299 cerillos?

____

8. Considera la sucesión 9, 11, 13, 15, 17, …

a) ¿Cuál es la regla general de la sucesión? ______________________

b) ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 50 de la sucesión? ____________

9. Responde.

a) ¿Con qué expresión algebraica se calcula el número de diagonales de un polígono de n lados?

____

b) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 20 lados? _______________

10. Subraya las expresiones que corresponden al perímetro de un rectángulo cuyos lados miden a y b.

- $a + b + a + b$
- ab
- $2\,(a + b)$
- $\frac{a+b}{2}$
- $2a + 2b$

11. Considera la sucesión de figuras formadas por hexágonos regulares y anota los datos que faltan en la tabla. El lado de un hexágono mide 1 cm y la apotema mide 0.87 cm.

Núm. de hexágonos	1	2	3	4		9			25	n
Perímetro (cm)	6	10	14	18			66			
Área (cm^2)	2.61	5.22			18.27			49.59		

12. Responde con base en la información.

En una bolsa hay tres canicas rojas, cinco negras y dos blancas, todas del mismo tamaño.

Si se saca, sin ver, una canica de la bolsa…

a) ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? ____________________

b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea roja? ____________________

Segundo periodo (Secuencias 11-20)

1. Encuentra el valor de n que hace verdadera cada igualdad.

a) $4.05n = -405$;
$n =$ ______

b) $-4.05 \div n = -40.5$;
$n =$ ______

c) $-\frac{1}{3}n = -\frac{2}{5}$;
$n =$ ______

d) $-\frac{3}{4} \div n = \frac{1}{2}$;
$n =$ ______

2. Resuelve las operaciones.

a) $-8 \times (-7 + 2) =$ ____________________

b) $-\frac{3}{5}(0.5 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}) =$ ____________________

c) $\frac{7}{5} - [-\frac{1}{4} \times (-\frac{4}{5})] \div \frac{5}{6}) =$ ____________________

3. Completa las igualdades.

a) $a^2 \times a^3 = a^{\square}$

b) $\frac{a^2}{a^3} = a^{\square} = \frac{1}{\square}$

c) $a^{\square} = 1$

d) $a^{\square} = a$

e) $a^{-3} = \frac{1}{\square}$

f) $(a^b)^c = a^{\square}$

4. Calcula las potencias y simplifica el resultado lo más que se pueda.

a) $2^5 =$ __________
b) $2^{-5} =$ __________
c) $5^0 =$ __________
d) $10^1 =$ __________
e) $(\frac{3}{4})^2 =$ __________
f) $(3 - 5)^2 =$ __________

5. Cinco meseros deciden repartirse las propinas proporcionalmente al número de clientes que atendió cada uno. En un día de trabajo reunieron $4 977.00. Anota los datos que faltan en la tabla.

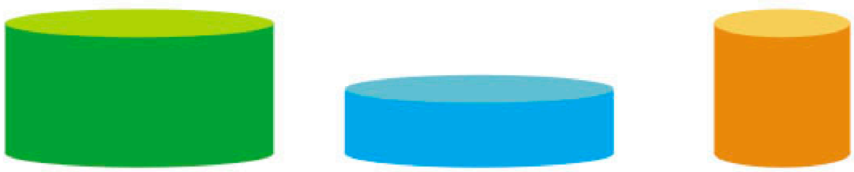
Mesero(a)	Clientes atendidos	Cantidad que le corresponde ($)
A	6	
B	8	
C	11	
D	7	
E	10	
TOTAL		

6. Analiza la información y haz lo que se pide.

Luis mezcló pintura blanca y roja, y vertió la mezcla en tres botes de distinto tamaño: uno de 20 L, otro de 10 L y uno más de 5 L. Cada bote quedó con pintura hasta la mitad de su capacidad.

Como le sobró $\frac{1}{2}$ L de pintura roja, decidió distribuirla en cada bote, de manera proporcional a su capacidad.

a) Calcula cuánta pintura roja debe agregar a cada bote.



- Para el bote de 20 L: ________________
- Para el bote del 10 L: ________________
- Para el bote de 5 L: ________________

b) Verifica que las cantidades anteriores sumen $\frac{1}{2}$ L: ________________________

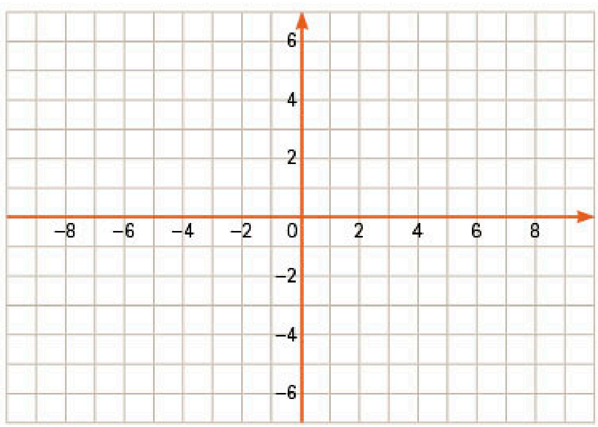
7. Encuentra seis pares de números (x, y) que resuelvan la ecuación $2x + y = 5$. Los números pueden ser positivos o negativos, enteros o fraccionarios.

- Solución 1: ______________
- Solución 2: ______________
- Solución 3: ______________
- Solución 4: ______________
- Solución 5: ______________
- Solución 6: ______________

8. Resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2y - x = -6 \end{cases}$$

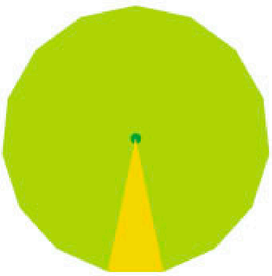
$x =$ ___; $y =$ ___



9. Completa las afirmaciones con los textos “una solución”, “infinidad de soluciones” o “ninguna solución”.

- Si las dos rectas son paralelas, el sistema de ecuaciones tiene ____________
- Si las dos rectas se cortan en un punto, el sistema de ecuaciones tiene ____________
- Si las ecuaciones de ambas rectas son distintas, pero tienen la misma pendiente, el sistema de ecuaciones tiene____________________
- Si una ecuación se obtiene multiplicando por 2 los términos de la otra ecuación, el sistema tiene____________________

10. La figura es un polígono regular de 15 lados. Anota las medidas que se piden.



a) Ángulo central: ______ b) Ángulo interior: ______

c) Ángulo exterior: ______ d) Suma de los ángulos interiores: ______

11. Haz las conversiones de unidades.

a) 0.89 km = ____ m b) 3 cm = ____ m

c) 4 mm = ____ cm d) 0.075 m = ____ cm

12. Analiza la información y responde.

Norma y Juan midieron el largo de una mesa. Norma usó como unidad de medida el largo de un lápiz; Juan, la longitud de una goma de borrar.

Medida de la mesa obtenida por Norma: 8 “lápices”.

Medida de la mesa obtenida por Juan: 40 “gomas”.

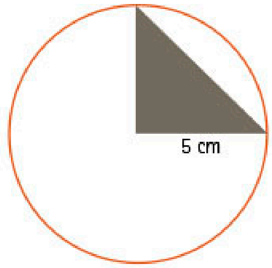
a) ¿Cuántas gomas mide un lápiz? ________________

b) ¿Cuántos lápices mide una goma? ________________

c) ¿Cuál es la relación entre las medidas del lápiz y de la goma?

____

13. Se ha trazado un triángulo rectángulo dentro de un círculo de 5 cm de radio. Calcula…



a) el área del triángulo: ________

b) el área del círculo no ocupada por el triángulo: ________________________

14. Un carpintero hará una mesa circular para 8 personas. Si cada persona necesita 60 cm del contorno…

a) ¿cuál debe ser el diámetro de la mesa? ________________________

b) ¿cuánto medirá la superficie de la mesa? ________________________

15. Considera el cilindro que se muestra y calcula lo que se pide.

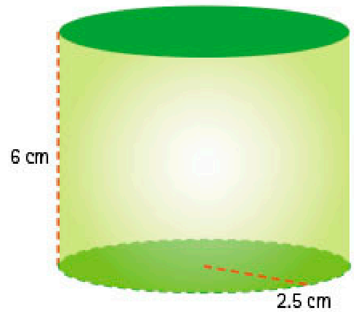
a) Perímetro de la base: ____________

b) Área de la base: ________________

c) Área lateral: ___________________

d) Área total: ____________________

e) Volumen: _____________________



16. Subraya el conjunto de datos que tiene dos modas.

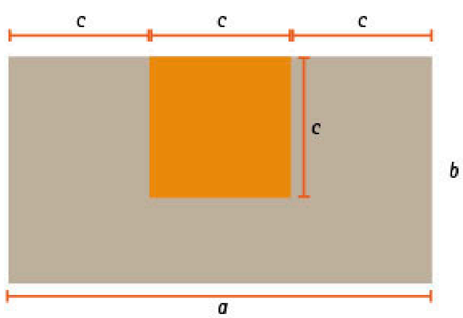
- 1, 2, 3, 3, 4, 6, 9
- 3, 4, 4, 4, 7, 7, 8
- 2, 2, 3, 5, 6, 9, 9

17. Encuentra los valores estadísticos que se indican para el siguiente conjunto de datos: 2, 5, 8, 3, 1, 7, 6.

- Media: ________
- Mediana: ________
- Rango: ________

18. Subraya las expresiones que representan el área de la figura no cubierta por el cuadrado .

- $ab - c^2$
- $ab + c^2$
- $3cb + c^2$
- $3cb - c^2$
- $2c^2 + a(b - c)$
- $2c^2 - a(b - c)$



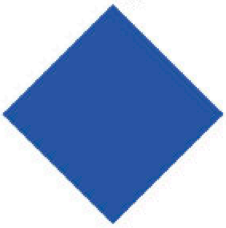
Tercer periodo (Secuencias 21-30)

1. Anota las medidas que faltan en cada cuadrado.

Lado = ________

Perímetro = 20 cm

Área = ________



Lado = ________

Perímetro = ______

Área = 31.36 cm²

Lado = 1 cm

Perímetro = ______

Área = ________

2. Responde con base en la información.

Dos satélites giran alrededor de la Tierra. Sus distancias desde el centro de esta son...

- Satélite A: 1.5×10^7 km
- Satélite B: 9×10^6 km

a) ¿Qué satélite está más alejado del centro de la Tierra? ________________

b) ¿Cuál es la máxima distancia que puede haber entre A y B?

____

c) ¿Cuál es la mínima distancia que puede haber entre A y B?

____

3. Resuelve los sistemas de ecuaciones. Utiliza para cada uno el método que te resulte más práctico.

a) $\begin{cases} x - 5y = 31 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$ Solución: $x =$ ____; $y =$ ____

b) $\begin{cases} a = -2b + 7 \\ a = b - 20 \end{cases}$ Solución: $a =$ ____; $b =$ ____

c) $\begin{cases} m = 2n + 10 \\ 5n + m = 3 \end{cases}$ Solución: $m =$ ____; $n =$ ____

4. Formula un sistema de ecuaciones que corresponda al siguiente problema y resuélvelo con la técnica que desees.

Una escuela compró varios ejemplares del libro A, que cuesta $200.00, y del libro B, que cuesta $150.00. Compró en total 120 libros y pagó $20 500.00 por ellos. ¿Cuántos ejemplares de cada libro compró?

____

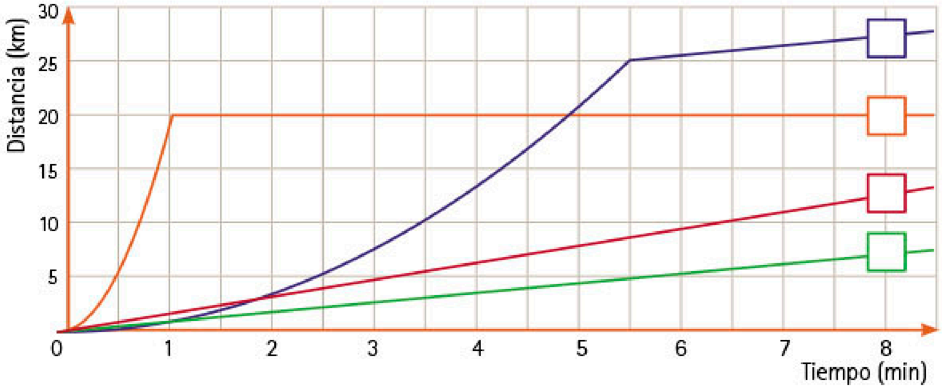
____

5. Analiza la información y haz lo que se pide.

Cuatro vehículos, A, B, C y D, inician un trayecto al mismo tiempo y se sabe que…

- el vehículo A se detuvo después del primer minuto;
- el B aumentó gradualmente su velocidad durante los primeros 5.5 minutos, y después mantuvo una velocidad constante;
- el C mantuvo una velocidad constante durante todo el trayecto;
- el D también mantuvo una velocidad constante, pero iba más rápido que el vehículo C.

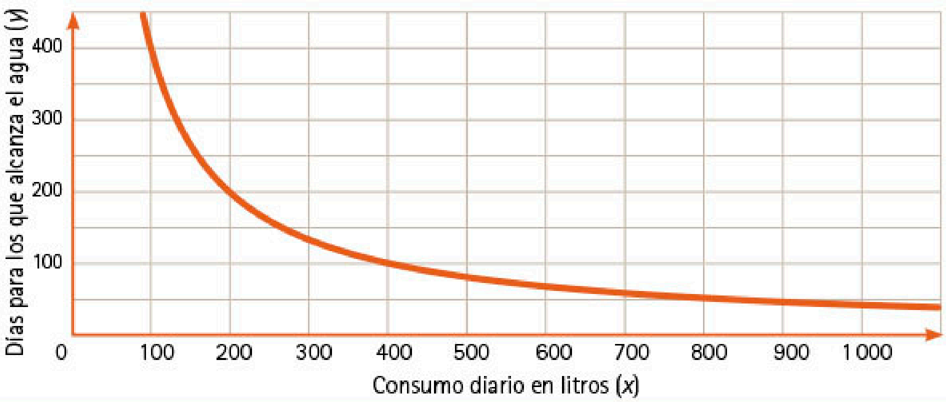
a) Analiza las gráficas y anota, en el recuadro junto a cada una, la letra del vehículo correspondiente.



b) Explica brevemente cómo identificaste la gráfica de cada vehículo.

6. Responde con base en la información.

En una cisterna hay almacenados 40000 L de agua. La gráfica expresa la relación entre el consumo diario de agua y el número de días que duraría el líquido. Por ejemplo, si se consumieran 800 L diarios, el agua alcanzaría para 50 días.



a) Completa la tabla a partir de la gráfica anterior.

Consumo diario de agua en litros (x)	100	200	400	500	800	1 000
Días para los que alcanza (y)						

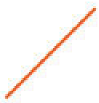
b) ¿La relación es de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa, o no es de proporcionalidad? Justifica tu respuesta.

____

____

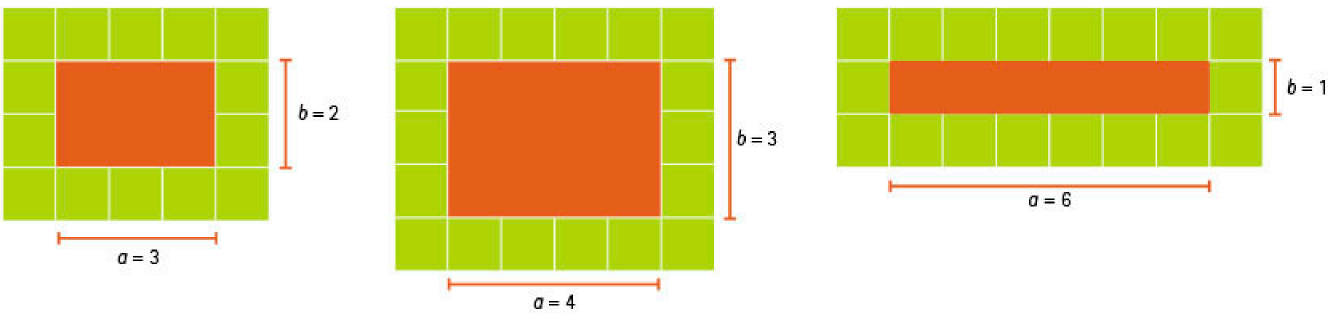
c) Coloca un ✘ junto a las expresiones algebraicas que no corresponden a la relación anterior.

- $yx = 40000$
- $y = 40000x$
- $y = \frac{40000}{x}$
- $x = \frac{40000}{y}$



7. El segmento trazado es un lado de un polígono regular de ocho lados. Completa el polígono y anota la medida de un ángulo interior.

8. Analiza las tres figuras; cada una está formada por un rectángulo naranja rodeado de losetas cuadradas. Observa que a representa el largo del rectángulo naranja y b, el ancho.



a) ¿Cuáles de las siguientes expresiones no sirven para calcular la cantidad de losetas que rodean al rectángulo naranja? Márcalas con un ✘.

- $2a + 2b + 4$
- $2a + 2b - 4$
- $2(a + 1) + 2(b + 1)$
- $2(a + 2) + 2(b + 2)$
- $2(a + b + 2)$
- $2(a + b) + 4$

b) ¿Cuántas losetas se necesitan para rodear un rectángulo de 18 de largo por 15 de ancho? ______________

9. Subraya la regla general que produce una sucesión con solo números negativos.

- $-5n + 4$
- $\frac{4n-2}{2}$
- $15n - 85$
- $5n - 17$

Anota los cinco primeros términos de la sucesión que subrayaste.

____

10. Relaciona las unidades de medida de la primera fila con sus equivalentes de la segunda; para esto, anota en el paréntesis la letra que corresponde (a, b, c...).

a) 1 galón	b) 1 pie	c) 1 yarda	d) 1 libra	e) 1 tonelada	f) 1 ml	g) 1 pulgada
( ) 0.001 L	( ) 3.7 L	( ) 2.54 cm	( ) 30.48 cm	( ) 454 g	( ) 1 000 kg	( ) 91.44 cm

11. Un turista quiere transportar, por avión, una maleta que pesa 85 libras, pero el peso máximo permitido por maleta es 23 kg. Por cada kilogramo de sobrepeso en el equipaje hay que pagar $250.00.

a) ¿Cuántos kilogramos pesa la maleta del turista? ____________________

b) ¿Cuánto deberá pagar por el sobrepeso? ____________________

12. A tres grupos de alumnos, A, B y C, se les aplicó una prueba con seis preguntas. En las tablas se muestran los resultados de los tres grupos.

Grupo A

Aciertos	Frecuencia
1	1
2	2
3	17
4	17
5	2
6	1

Grupo B

Aciertos	Frecuencia
1	16
2	3
3	1
4	1
5	3
6	16

Grupo C

Aciertos	Frecuencia
1	6
2	7
3	7
4	7
5	7
6	6

a) ¿Cuántos alumnos hay en cada grupo? ____________________

b) ¿Cuál es el promedio de aciertos de cada grupo? ____________________

13. En un estacionamiento hay 25 coches: 12 rojos, 7 azules, 3 blancos y el resto son negros. Calcula la probabilidad de que el siguiente coche en salir sea...

- rojo: _____
- ni rojo ni azul: _____
- blanco o negro: _____

Lección 3, p. 17

1.

a) 2 b) $\frac{22}{9}$ c) 3 d) 1

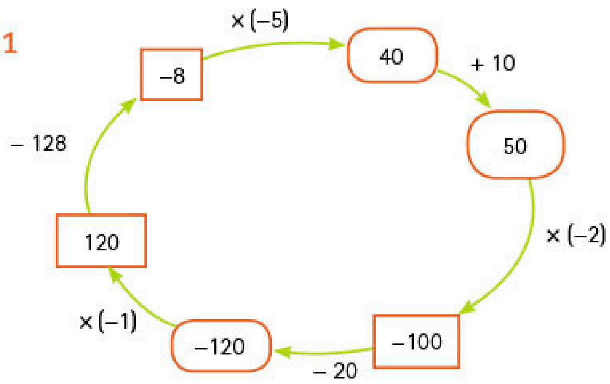
e) 15 f) $\frac{1}{8}$ g) 8 h) 6

i) 2 j) 1 k) 0.05 l) $\frac{1}{6}$

m) 12 n) 6.07 o) 5

Lección 5, p. 21

1.



Lección 7, p. 25

1.

a) R. T. $a = -36$, $b = \frac{1}{3}$; $a = 6$, $b = -2$; $a = 12$, $b = -1$; $a = -2$, $b = 6$
b) Sí; $b = \frac{1}{2}$
c) R. T. $a = -12$, $b = 6$; $a = 6$, $b = -3$; $a = 20$, $b = -10$; $a = -2$, $b = 1$
d) Sí; $b = \frac{1}{2}$
e) $36 \times (-2) \times (18) = (-36) \times (-2) \times (-18)$

Lección 10, p. 31

a)

Relación I
Cuota por integrante:
R. T. \$100

Número de integrantes	Ingreso total
5	\$500.00
10	\$1 000.00
15	\$1 500.00
20	\$2 000.00

Relación II
Número de integrantes:
R. T. 7

Cuota por integrante	Ingreso total
\$100.00	\$700.00
\$250.00	\$1 750.00
\$500.00	\$3 500.00
\$1 000.00	\$7 000.00

Relación III
Ingreso total:
R. T. \$3 500.00

Número de integrantes	Cuota por integrante
2	\$1 750.00
5	\$700.00
10	\$350.00
20	\$175.00

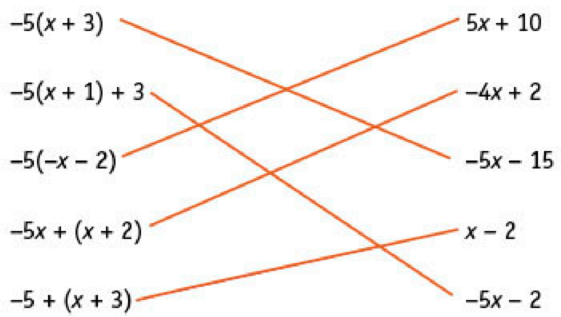
b) Relación I: proporcionalidad directa; relación II: proporcionalidad directa; relación III: proporcionalidad inversa.

Lección 14, p. 39

1.

Salvo $2(n - 1)$, todas las demás expresiones corresponden a la sucesión (y son equivalentes).

2.



4.

a) n
b) $2n + 6$
c) $2n + 2$
d) $5n + 8$

5. Salvo $5(n + 1) - 3$, las demás expresiones corresponden al total de cuadros.

Lección 16, p. 43

1.

a) $P = 2a + 2b$
b) $P = 6a + 2b + 4c$
c) $A = ba$
d) $A = 2((a + b)c) = 2ac + 2bc$
e) $A = 2((a + c)a) = 2a^2 + 2ac$
f) $A = ba + 4ac + 2bc + 2a^2$

Lección 19, p. 49

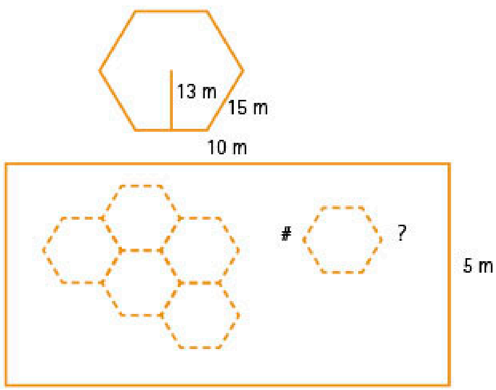
1.

a) 32 b) 12 lados (9 + 3) c) 90 d) 7

Lección 23, p. 57

1.

a)



b) $A = \frac{90(13)}{2} = 585 \text{ cm}^2$

c) $A = 5 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 50 \text{ m}^2 = 500\,000 \text{ cm}^2$

d) $500\,000 \div 585 \approx 854.7$; se requieren al menos 855 losetas.

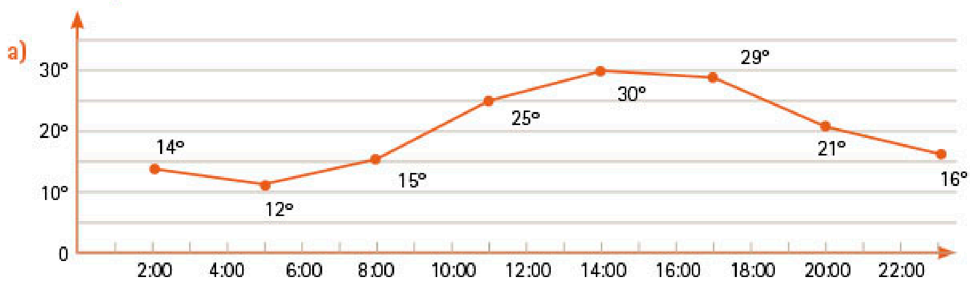
e) $A = \frac{7(90)(13)}{2} = 4\,095 \text{ cm}^2$

Lección 25, p. 61

R. T.

1.

a)



Lección 29, p. 69

1.

a) T: $\frac{1}{8}$; E: $\frac{3}{8}$; vocal: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; sin A: $\frac{7}{8}$; sin E: $\frac{5}{8}$; vocal o consonante: $\frac{8}{8} = 1$; O: $\frac{0}{8} = 0$; ni N ni T: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) Pertenezca al taller de música: $\frac{45}{395} = \frac{9}{79}$; no pertenezca al taller de carpintería: $\frac{245}{395} = \frac{49}{79}$

c) $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $P(A) + P(C) = 1$; $P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$

Lección 32, p. 75

1.

a)

−6.2	9.3
−8.2	12.3

b)

2.5	5
−5.05	−10.1

c)

−5	−8
−7	−11.2

d)

15	−21
−20.4	28.56

2.

×	5	4	−8	−2
−0.5	−2.5	−2	4	1
−3	−15	−12	24	6
7	35	28	−56	−14
−6	−30	−24	48	12

3.

a) $-\frac{5}{2}$ b) $-\frac{9}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

4.

a) Nueve b) Siete

Lección 34, p. 79

1.

a) 5^2 b) 6^4 c) 2^6 d) 12^5
e) 11^7 f) 2^8 g) 13^{12} h) 17^5
i) 8^5 j) 9

Lección 36, p. 83

1.

a) 30×3^4 b) R. T. 30×3^n

c) $(30 \times 3^1) + (30 \times 3^2) + (30 \times 3^3) = 90 + 270 + 810 = 1\,170$

Lección 38, p. 87

1.

a) \$30.00 a Martha; \$30.00 a Pati; \$47.50.00 a Lupita; y \$42.50 a Marina.

b) Martha: \$90.00; Pati: \$90.00; Lupita: \$142.50; Marina: \$127.50.

Lección 44, p. 99

1.

a) $2(a + 1)$

b) $2\left(\frac{a-b}{2}\right)$

c) $a + a + 1$

d) $12 - (a - 3)$

e) $4(a + 2b) - 2(2a + b)$

- $-a + 15$
- $6b$
- $2a + 2$
- $a - b$
- $2a + 1$

2.

Expresión 1:
R. T. $5(10) - 2a$
Expresión 2:
$(5 - 2)(10) + 2(10 - a)$

3.

a) R. T. $bc + ad - cd$
b) $ab - (bc + ad - cd)$
c) $bc + ad - cd = 12(2) + 8(3) - 2(3) = 24 + 24 - 6 = 42$;
$ab - [(b - d)(a - c)] = 8(12) - [(12 - 3)(8 - 2)] = 96 - [(9)(6)] = 96 - 54 = 42$

Lección 47, p. 105

1.

a) 2 340°; 3 240°
b) Doce lados
c) No; R. T. La suma debe ser 720°
d) 162°
e) Seis lados
f) No
g) 22.5°
h) $180° - x°$

Lección 52, p. 115

Distancia en...				
metros	decámetros	kilómetros	decímetros	hectómetros
100 m	10 dam	0.1 km	1 000 dm	1 hm
400 m	40 dam	0.4 km	4 000 dm	4 hm
1 000 m	100 dam	1 km	10 000 dm	10 hm
1 500 m	150 dam	1.5 km	15 000 dm	15 hm
20 000 m	2 000 dam	20 km	200 000 dm	200 hm
25 000 m	2 500 dam	25 km	250 000 dm	250 hm
30 000 m	3 000 dam	30 km	300 000 dm	300 hm

2.

8 km = 80 000 dm; 100 dm = 0.1 hm; 500 mm = 5 dm; 2 hm = 0.2 km; 60 m = 6 000 cm; 7.5 dam = 750 dm

Lección 56, pp. 122-123

1.

a) Tela: 914.16 cm²; listón: 122.83 cm
b) Tela: 800 cm²; listón: 120 cm
c) Tela: 578.54 cm²; listón: 91.42 cm
d) Tela: 863.68 cm²; listón: 175.84 cm

2.

a) En el a); b) En el d)

Lección 59, p. 129

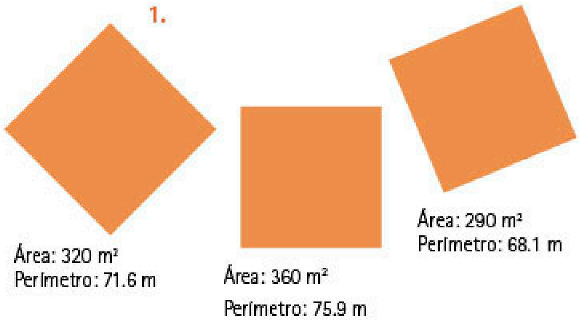
1.

a) El A; b) El A

c) R. T. Área lateral de A = $10(10\pi) = 100\,\pi$; área de las tapas de A = $2\pi(5)^2 = 50\pi$; área total de A = 150π cm^2. Volumen de A = $\pi(5^2)(10) = 250\pi$ cm^3. Área lateral de B = $15(8\pi) = 120\,\pi$; área de las tapas de B = $2\pi(4)^2 = 32\pi$; área total de B = 152π cm^2. Volumen de B = $\pi(4^2)(15) = 240\pi$ cm^3.

Lección 65, p. 141

1.



2. 2.5×10^{-3}, 2×10^{-2}, 2.9×10^{-2}, 3×10^{-1}, 3.2×10^{-1}

3.

a) $\frac{784}{27}$ b) $\frac{196}{375}$ c) +3 o −3 d) 0.1

Lección 68, p. 147

1.

a) $x = 1$; $y = 3$ b) $x = 3$; $y = 4$ c) $x = \frac{32}{19}$; $y = -\frac{104}{19}$

Lección 71, p. 153

a) Fase II: el crecimiento es casi proporcional al tiempo; fase III: el crecimiento de la planta disminuye de velocidad; fase I: el crecimiento de la planta aumenta de velocidad.

b) Fase II

c) Fase III

d) Fase I

Lección 73, p. 157

1.

a) $2n - 6$	−1, −2, −3, −4, −5, …
b) $-5n$	−4, −2, 0, 2, 4, …
c) $-n$	−4, −9, −14, −19, −24, …
d) $n - 15$	−5, −10, −15, −20, −25, …
e) $-5n + 1$	−14, −13, −12, −11, −10, …
f) $-2n + 3$	1, −1, −3, −5, −7, …

2.

a) $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$

b) 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1

c) 0, −1, −2, −3, −4

d) −1.5, −3.5, −5.5, −7.5, −9.5

3.

a) $-3n - 1$, $-(3n + 1)$

b) -46

c) -301

d) El lugar 50

e) No

Lección 76, p. 163

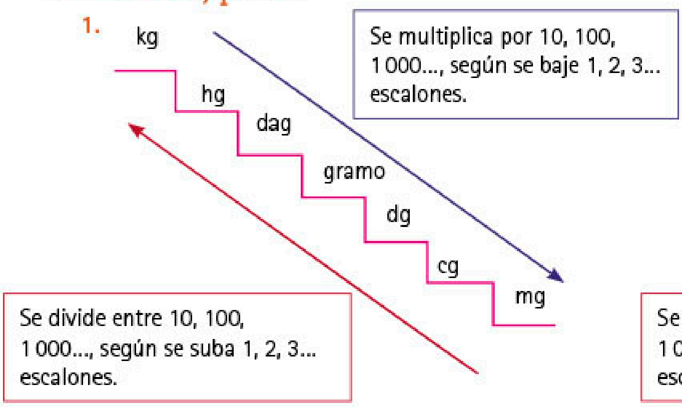
1.

a) Diseño A: $120° + 120° + 60° + 60° = 360°$

Diseño B: $90° + 90° + 60° + 60° + 60° = 360°$

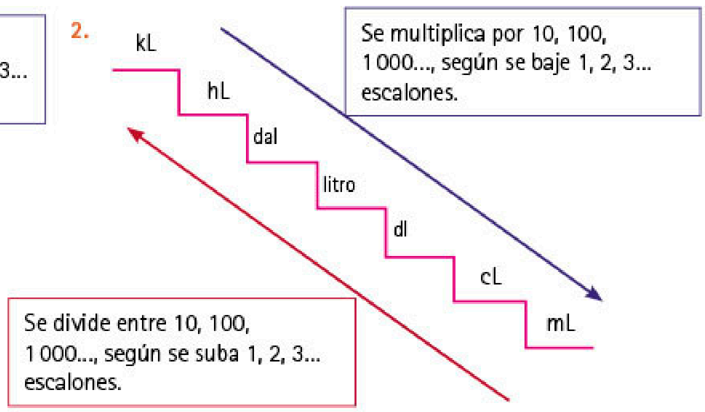
Lección 79, p. 169

1.



4 mg = 0.004 g; 18 hg = 1800 g;
934 g = 93.4 dag; 8 kg = 8000 g

2.



3 dL = 30 cL; 4 kL = 4000 L;
3.2 hL = 0.32 kL; 345 L = 34.5 daL

3. $3\frac{1}{2}$ pulgadas = 8.89 cm; 5 m = 5.47 yd; 4.5 galones = 16.65 L; 70 kg = 154.19 libras

Lección 81, p. 173

1.

a) 147.1875 min ≈ 2.45 h

b) 300 min = 5 h; 1 050 min = 17.5 h; 700 + 200 + 200 = 1 100 cm^3

c) 1 203.72 cm^3

Lección 89, p. 189

1.

c) $P(D) = \frac{1}{12}$; $P(E) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; $P(F) = 0$; $P(\overline{F}) = 1$

2.

a) Con la 2, porque es la ruleta en que la zona A es más grande ($\frac{1}{4}$ del área total).

b) Ruleta 1: $\frac{1}{2}$; ruleta 2: $\frac{1}{4}$; ruleta 3: $\frac{1}{5}$

BIBLIOGRAFÍA

Libros recomendados

Allen Paulos, John, *La vida es matemática*, Barcelona, Tusquets, 2015.

Doxiadis, Apostolos, *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, Barcelona, B de Bolsillo, 2005.

Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números*, Madrid, Siruela, 1997.

Fabretti, Carlo, *Malditas matemáticas (Alicia en el país de los números)*, Madrid, Santillana, 2013.

Leavitt, David, *El contable hindú*, Barcelona, Anagrama, 2011.

Ogawa, Yoko, *La fórmula preferida del profesor*, Madrid, Funambulista, 2011.

Pickover, A. Cliford, *El libro de las matemáticas: de Pitágoras a las 57 dimensiones*, España, Librero, 2012.

Singh, Simon, *Los Simpson y las matemáticas*, España, Ariel, 2013.

Smullyan, Raymond, *Alicia en el País de las Adivinanzas*, Madrid, Cátedra, 2014.

Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Noriega Editores, 1994.

Enlaces web recomendados (fecha de consulta: julio de 2018)

Cuéntame. Página del Instituto Nacional de Estadística y Geografía
cuentame.inegi.org.mx/

Descartes. Materiales didácticos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas
recursostic.educacion.es/descartes/web/indice_ud.php
recursostic.educacion.es/descartes/web/indice_miscelanea.php

DivulgaMAT. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española
www.divulgamat.net/

Eduteka. Portal educativo con contenidos para docentes y directivos para enriquecer los ambientes escolares con el uso de las TIC
www.eduteka.org

GeoGebra. Recursos para el aula. Actividades, simulaciones y ejercicios de matemáticas y ciencia
www.geogebra.org/materials?lang=es

Khan Academy. Ejercicios, videos y recursos de aprendizaje de matemáticas para todas las edades
es.khanacademy.org/math